La forma normal de Smith de las matrices de distancia de k-árboles

XLI Coloquio Víctor Neumann-Lara 2026

Carlos A. Alfaro

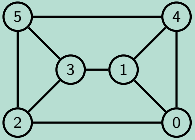
trabajo en conjunto con J.U. Medrano y I. Téllez-Téllez

Matrices de distancia

Definición

Sea G una gráfica conexa con n vertices.
La distancia $d_G(u, v)$ entre los vertices u y v es el número de aristas en un camino mínimo entre u y v.
La matriz de distancia $D(G)$ de G es la matriz $n \times n$ cuya entrada (u, v) es la distancia $d_G(u, v)$ entre los vertices u and v.

Ejemplo



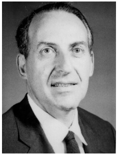
G

$$D(G) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Determinante de la matriz de distancia

Ron Graham

László Lovász



Henry O. Pollak

La celebrada fórmula de Graham, Lovász y Pollak nos dice que

$$\det(D(T_{n+1})) = (-1)^n n 2^{n-1}$$

para cualquier árbol T_{n+1} de $n+1$ vértices.

La forma normal de Smith

Yaoping Hou

Ching Wah Woo

Hou y Woo extendieron la fórmula de Graham, Lovász y Pollak demostrando que

$$\mathrm{SNF}(D(T_{n+1})) = \mathrm{I}_2 \oplus 2\mathrm{I}_{\mathrm{n}-2} \oplus (2\mathrm{n})$$

para cualquier árbol T_{n+1} de $n+1$ vértices.

¿Qué es la forma normal de Smith?

Dos matrices M y N son **equivalentes** si existen matrices unimodulares P y Q con entradas en $\mathbb{Z}$ tal que $M = PNQ$.

La **forma normal de Smith** de una matriz entera M, denotada por $\mathrm{SNF}(M)$, es la única matriz diagonal $\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_r, 0, \ldots, 0)$ equivalente a M tal que $r = rango(M)$ y $f_i | f_j$ para $i < j$.

Los **factores invariantes** (o **divisores elementales**) de M son los enteros en la diagonal de la $\mathrm{SNF}(M)$.

Una motivación

Teorema (A. Hoekstra-Mendoza, Serrano & Villagrán, 2025)

Los 3-menores de la matriz de distancia de cualquier gráfica bipartita conexa son números pares.

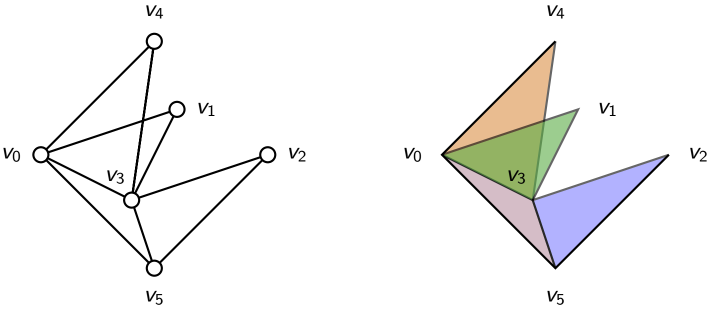
Corolario

El determinante de la matriz de distancia de cualquier gráfica bipartita conexa es un número par.

k-árboles

Un k-**clique** es una subgráfica completa de k vértices.

Un k-**árbol** se define recursivamente como una gráfica completa con k vértices, o como una gráfica formada al agregar un nuevo vértice a un k-árbol más pequeño, de manera que, el nuevo vértice esté conectado mediante k nuevas aristas a todos los vértices de un k-clique existente en el k-árbol más pequeño.



Caminos y distancias en k-árboles

Sea T un k-árbol.

Para $d \in \{1, \ldots, k\}$, dos d-cliques τ y τ' en T son **adyacentes** si pertenecen al mismo $(d+1)$-clique σ. En tal caso, τ y τ' son **incidentes** a σ.

De esta forma, si τ y τ' son d-cliques, un d-**camino** entre τ y τ' es una secuencia finita $\tau_1\sigma_1\tau_2\sigma_2\cdots\tau_l$, donde $\tau = \tau_1$, $\tau' = \tau_l$, y τ_i y τ_{i+1} son incidentes al mismo $(d+1)$-clique σ_i.

La d-**ésima** distancia entre los d-cliques τ y τ' es el número de $(d+1)$-cliques en un d-camino mínimo desde τ y τ', y se denota por $\mathrm{dist}^{\mathbf{d}}(\tau, \tau')$.

Note que existe un d-**camino** entre cualquier par de d-cliques en cualquier k-árbol T.

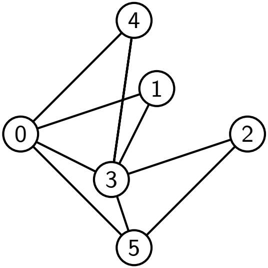
d-ésima matriz de distancia

Sea c_d el número de d-cliques en T.

La d-**ésima matriz de distancia** $\mathrm{D}^d(T)$ del k-árbol T es la matriz de orden $c_d \times c_d$, indexada por los d-cliques de T, tal que

$$\mathrm{D}^d(T)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \mathrm{dist}^d(\sigma_i, \sigma_j) & \text{de otra forma.} \end{cases}$$

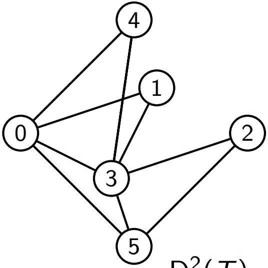
Primer matriz de distancia



$$D^1(T) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Note que $D^1(T) = D(T)$.

Segunda matriz de distancia



$$
D^2(T) = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccc} 01 & 03 & 04 & 05 & 13 & 23 & 25 & 34 & 35 \end{array} \\
\begin{array}{c} 01 \\ 03 \\ 04 \\ 05 \\ 13 \\ 23 \\ 25 \\ 34 \\ 35 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 1 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \\
3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\
3 & 2 & 3 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 & 1 \\
2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 0 & 2 \\
2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Resultados

Teorema (Alfaro-Medrano-Téllez,2026)

Sea $k \geq 1$ *y* $n \geq k+2$. *Para cualquier* k*-árbol* T_n *con* n *vértices, tenemos*

$$\mathrm{SNF}(\mathrm{D}^k(T_n)) = \mathrm{I}_{(k-1)(n-k)+2} \oplus (k+1)\mathrm{I}_{n-k-2} \oplus [k(k+1)(n-k)].$$

Corolario (Alfaro-Medrano-Téllez,2026)

$\det(\mathrm{D}^k(T_n)) = (-1)^{k(n-k)} k(k+1)^{n-k-1}(n-k).$

Bosquejo de la demostración

- $\mathrm{D}^k(T_n) \sim \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{1}^T & \mathbf{1}^T & \cdots & \mathbf{1}^T \\ \mathbf{1} & -\mathrm{J}_k - \mathrm{I}_k & \mathbf{0}_{k,k} & \cdots & \mathbf{0}_{k,k} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0}_{k,k} & -\mathrm{J}_k - \mathrm{I}_k & \cdots & \mathbf{0}_{k,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{1} & \mathbf{0}_{k,k} & \mathbf{0}_{k,k} & \cdots & -\mathrm{J}_k - \mathrm{I}_k \end{bmatrix}.$
- $\mathrm{SNF}(-\mathrm{J}_k - \mathrm{I}_k) = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, k+1).$
- $\mathrm{D}^k(T_n) \sim \mathrm{I}_{(k-1)(n-k)} \oplus \begin{bmatrix} n-k & 1^T \\ 1 & \mathrm{diag}(k+1, \ldots, k+1) \end{bmatrix}.$
- $\mathrm{SNF} \begin{bmatrix} n-k & 1^T \\ 1 & \mathrm{diag}(k+1, \ldots, k+1) \end{bmatrix} =$ $\mathrm{diag}(1, 1, k+1, \ldots, k+1, k(k+1)(n-k)).$

¿Se podrá obtener alguna formula para la forma normal de Smith de las d-matrices de distancia de los k-árboles con $d < k$?

Referencias:

- C.A. Alfaro, J.U. Medrano & I. Téllez-Téllez, *The Smith normal form of distance matrices of high dimensional trees.* **Comp. Appl. Math.** 45 (2026) 226.
- C.A. Alfaro, T.I. Hoekstra-Mendoza, J.P. Serrano & R.R. Villagrán, *Graphs with two trivial distance ideals over the polynomial ring with integer coefficients.* sometido.
- R.L. Graham & H.O. Pollak, *On the addressing problem for loop switching.* **Bell System Tech. J.** 50 (1971) 2495–2519.
- R.L. Graham & L. Lovász, *Distance matrix polynomials of trees.* **Adv. in Math.** 29 (1978) 60–88.
- Y. Hou & C. Woo, *Distance unimodular equivalence of graphs.* **Linear Multilinear Algebra** 56 (2008) 6 611–626.

¡Gracias!

Carlos A. Alfaro
https://alfaromontufar.github.io
alfaromontufar@gmail.com