Distinguiendo gráficas con 2 matrices

Banco de México

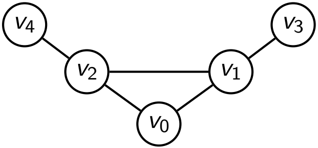
Carlos A. Alfaro

Matriz de adyacencia

Nos enfocaremos en gráficas **simples y conexas**.

La **matriz de adyacencia** de una gráfica $G = (V, E)$ con n vértices es la matriz cuadrada $n \times n$ en la que la entrada $(u, v) \in V \times V$ contiene el número de aristas entre los vértices u y v.

Está matriz se denota por $\mathbf{A}(G)$.

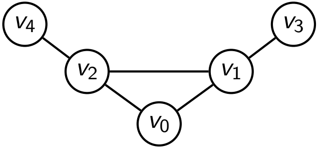


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices L y Q

Sea $\mathbf{deg(G)}$ la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal son los grados de los vértices de G.

- $L(G) = \deg(G) - A(G)$, matriz **Laplaciana**
- $Q(G) = \deg(G) + A(G)$, matriz **Laplaciana sin signos**

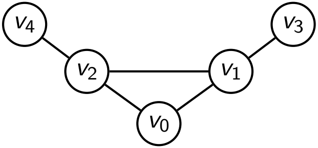


$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad Q(G) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de distancia

La **matriz de distancia** de una gráfica $G = (V, E)$ con n vértices es la matriz cuadrada $n \times n$ en la que la entrada $(u, v) \in V \times V$ contiene el número de aristas en el camino más corto entre los vértices u y v.

Está matriz se denota por $\mathbf{D}(G)$.

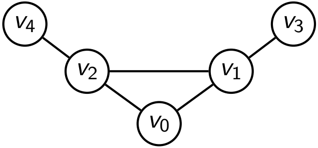


$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrices D^L y D^Q

Sea **Tr(G)** la matriz diagonal con la transmisión de los vértices de G, donde la *transmisión* **Tr(v)** de un vértice v se define como la suma de las distancias desde v a todos los vértices de G.

- $D^L(G) = Tr(G) - D(G)$, matriz **Laplaciana de distancia**
- $D^Q(G) = Tr(G) + D(G)$, matriz **Laplaciana de distancia sin signos**



$$D^L(G) = \begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -2 & 8 & -3 \\ -2 & -2 & -1 & -3 & 8 \end{bmatrix} \qquad D^Q(G) = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 8 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

Gráficas coespectrales

Definición

Los eigenvalores de una matriz M se conocen como el M-**espectro** de G con respecto a la matriz M, y el multiconjunto se denota por M-espectro(G).

Las gráficas M-**coespectrales** son gráficas que comparten el M-espectro.

Enumeración de gráficas coespectrales

Algunos resultados enumerativos

- Harary, King, Mowshowitz y Read (1971) $n \leq 7$ para A
- Godsil y McKay (1976) $n \leq 9$ para A
- Haemers y Spence (2004) $n = 10, 11$ para A
- Brouwer y Spence (2009) $n = 12$ para A
- Aouchiche y Hansen (2018) $n \leq 10$ para D, D^L, D^Q

n	4	5	6	7	8	9	10
$\lvert\mathcal{G}_n\rvert$	6	21	112	853	11,117	261,080	11,716,571
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(\mathsf{A})\rvert$	0	0	2	63	1,353	46,930	2,462,141
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(\mathsf{L})\rvert$	0	0	4	115	1,611	40,560	1,367,215
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(\mathsf{Q})\rvert$	0	2	10	80	1,047	17,627	615,919
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(\mathsf{D})\rvert$	0	0	0	22	658	25,058	1,389,986
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(\mathsf{D}^{\mathsf{L}})\rvert$	0	0	0	43	745	20,455	787,851
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(\mathsf{D}^{\mathsf{Q}})\rvert$	0	2	6	38	453	8,168	319,324

Cuadro: Número de gráficas conexas no isomorfas para las que existe un gráfica no isomorfa $\mathcal{M}$-coespectrales para $\mathcal{M} \in \{\mathsf{A}, \mathsf{L}, \mathsf{Q}, \mathsf{D}, \mathsf{D}^{\mathsf{L}}, \mathsf{D}^{\mathsf{Q}}\}$.

El espectro es una gran herramienta para distinguir gráficas

Nuestro propósito es proponer el uso de la forma normal de Smith (SNF) de ciertas matrices de distancia.

Mostraremos evidencia numérica de que este invariante puede hacer un mejor trabajo en distinguir gráficas.

Dos matrices M y N son **equivalentes** si existen matrices unimodulares P y Q con entradas en $\mathbb{Z}$ tal que $M = PNQ$.

La **forma normal de Smith** de una matriz entera M, denotada por $\mathrm{SNF}(M)$, es la unica matriz diagonal $\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_r, 0, \ldots, 0)$ equivalente a M tal que $r = rango(M)$ y $f_i | f_j$ para $i < j$.

Los **factores invariantes** (o **divisores elementales**) de M son los enteros en la diagonal de la $\mathrm{SNF}(M)$.

Decimos que dos gráficas G y H con M-**coinvariantes** si las SNFs de $M(G)$ y $M(H)$ son las mismas.

Las gráficas coinvariantes fueron introducidas por Andrew Vince en "Elementary Divisors of Graphs and Matroids" (1991).

Denotemos por $\mathcal{G}_n$ al conjunto de gráficas conexas con n vértices.

Sea $\mathcal{G}_n^{sp}(M)$ el conjunto de gráficas en $\mathcal{G}_n$ que tienen al menos una gráfica coespectral en $\mathcal{G}_n$ con respecto a la matriz M.

Sea $\mathcal{G}_n^{in}(M)$ el conjunto de gráficas en $\mathcal{G}_n$ que tienen al menos una gráfica coinvariante en $\mathcal{G}_n$ con respecto a la matriz M.

$\mathrm{sp}_n(M)$ denota el cociente $|\mathcal{G}_n^{sp}(M)|/|\mathcal{G}_n|$

$\mathrm{in}_n(M)$ denota el cociente $|\mathcal{G}_n^{in}(M)|/|\mathcal{G}_n|$

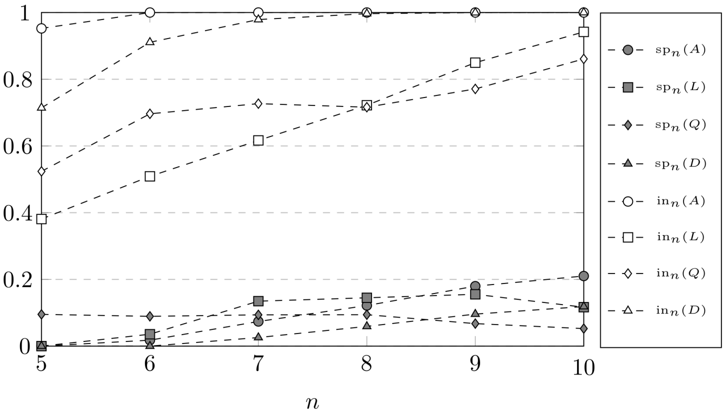


Figure 1: The fraction of graphs on n vertices that have at least one cospectral mate with respect to a certain associated matrix is denoted as *sp*. The fraction of graphs on n vertices with respect to a certain associated matrix that have at least one coinvariant mate is denoted as *in*.

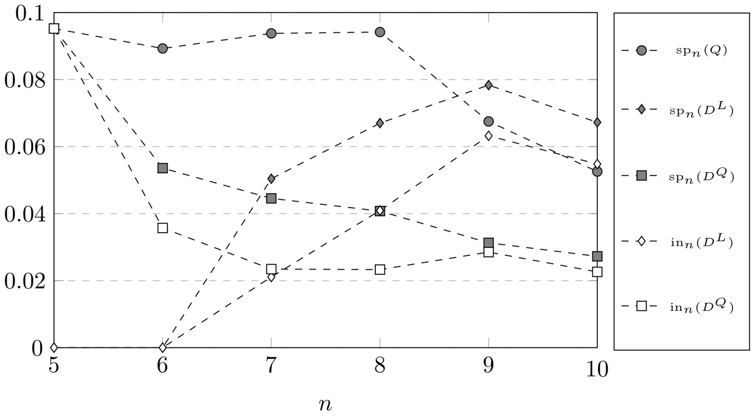


Figure 2: The fraction of graphs on n vertices that have at least one cospectral mate with respect to a certain associated matrix is denoted as *sp*. The fraction of graphs on n vertices with respect to a certain associated matrix that have at least one coinvariant mate is denoted as *in*.

Matrices A^{trs}, A^{trs}_{+}, D^{deg} y D^{deg}_{+}

- $A^{\mathrm{trs}}(G) = \mathrm{trs}(G) - A(G)$, matriz **transmisión-adyacencia**
- $A^{\mathrm{trs}}(G)_{+} = \mathrm{trs}(G) + A(G)$, matriz **transmisión-adyacencia sin signos**
- $D^{\mathrm{deg}}(G) = \mathrm{deg}(G) - D(G)$, matriz **grado-distancia**
- $D^{\mathrm{deg}}_{+}(G) = \mathrm{deg}(G) + D(G)$, matriz **grado-distancia sin signos**

n	4	5	6	7	8	9	10
$\lvert\mathcal{G}_n\rvert$	6	21	112	853	11,117	261,080	11,716,571
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(A)\rvert$	0	0	2	63	1,353	46,930	2,462,141
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(L)\rvert$	0	0	4	115	1,611	40,560	1,367,215
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(Q)\rvert$	0	2	10	80	1,047	17,627	615,919
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(D)\rvert$	0	0	0	22	658	25,058	1,389,986
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(D^L)\rvert$	0	0	0	43	745	20,455	787,851
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(D^Q)\rvert$	0	2	6	38	453	8,168	319,324
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(D^{\deg})\rvert$	0	2	6	40	485	9,784	355,771
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(D_+^{\deg})\rvert$	0	0	0	61	901	24,095	852,504
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(A^{\mathrm{trs}})\rvert$	0	2	6	38	413	7,877	299,931
$\lvert\mathcal{G}_n^{sp}(A_+^{\mathrm{trs}})\rvert$	0	0	0	43	728	19,757	765,421
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(A)\rvert$	4	20	112	853	11,117	261,080	11,716,571
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(L)\rvert$	2	8	57	526	8,027	221,834	11,036,261
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(Q)\rvert$	2	11	78	620	7,962	201,282	10,086,812
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(D)\rvert$	2	15	102	835	11,080	260,991	11,716,249
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(D^L)\rvert$	0	0	0	18	455	16,505	642,002
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(D^Q)\rvert$	0	2	4	20	259	7,444	264,955
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(D^{\deg})\rvert$	2	2	6	34	538	17,497	902,773
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(D_+^{\deg})\rvert$	2	11	46	495	7,169	209,822	10,815,879
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(A^{\mathrm{trs}})\rvert$	0	2	4	22	240	6,642	237,118
$\lvert\mathcal{G}_n^{in}(A_+^{\mathrm{trs}})\rvert$	0	0	0	16	456	15,952	605,625

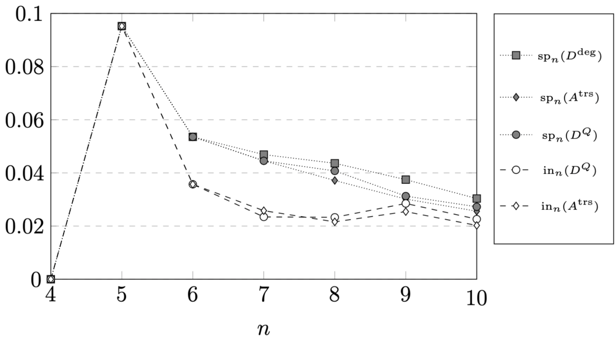


Figure 1: The parameters $sp_n(M)$ and $in_n(M)$ represent the fraction of graphs with n vertices that have at least one M-cospectral or M-coinvariant mate, respectively. We only show the five best performing parameters.

Número de gráficas con 10 vértices para las que existe una gráfica con los mismos dos parámetros al mismo tiempo.

parameter	# graphs
$\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{trs}}) \cap \mathrm{SNF}(D^L)$	82
$\mathrm{Spec}(D^{\mathrm{deg}}) \cap \mathrm{SNF}(D^L)$	82
$\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{trs}}) \cap \mathrm{SNF}(A^{\mathrm{trs}}_+)$	84
$\mathrm{Spec}(D^{\mathrm{deg}}) \cap \mathrm{SNF}(A^{\mathrm{trs}}_+)$	84
$\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{trs}}) \cap \mathrm{SNF}(L)$	86
$\mathrm{Spec}(D^{\mathrm{deg}}) \cap \mathrm{SNF}(L)$	86
$\mathrm{Spec}(A^{\mathrm{trs}}) \cap \mathrm{Spec}(D^L)$	99
$\mathrm{Spec}(D^{\mathrm{deg}}) \cap \mathrm{Spec}(D^L)$	99

$|\mathcal{G}_{10}| = 11,716,571$

Referencias

- A. Abiad & C.A. Alfaro, *Enumeration of cospectral and coinvariant graphs.* **Appl. Math. Comput.** 408 (2021) 126348.
- C.A. Alfaro, R.R. Villagrán, O. Zapata, *Distinguishing graphs with two integer matrices.* arXiv preprint arXiv:2309.15365
- M. Aouchiche & P. Hansen. *Cospectrality of graphs with respect to distance matrices.* **Applied Mathematics and Computation** 325 (2018) 309–321.
- C. Godsil & B. McKay. *Some computational results on the spectra of graphs.* Proceedings of the Fourth Australian Conference Held at the University of Adelaide. (1976) 73–92.
- W.H. Haemers & E. Spence. *Enumeration of cospectral graphs.* **European Journal of Combinatorics** 25 (2004) 199–211.
- F. Harary, C. King, A. Mowshowitz & R.C. Read. *Cospectral graphs and digraphs.* **Bull. London Math. Soc.** 3 (1971) 321–328.

¡Gracias!

Carlos A. Alfaro
alfaromontufar@gmail.com
https://alfaromontufar.github.io