Enumeración de gráficas coespectrales y coinvariantes

Coloquio Víctor Neumann-Lara 2022

Carlos A. Alfaro

en colaboración con Aida Abiad, Kristin Heysse y Marcos Vargas

Dada una gráfica **simple y conexa** G, asociaremos una matriz $M(G)$ a G.

- $A(G)$, matriz de **adyacencia**
- $L(G) = \deg(G) - A(G)$, matriz **Laplaciana**
- $Q(G) = \deg(G) + A(G)$, matriz **Laplaciana sin signos**

donde $\deg(G)$ es la matriz diagonal cuyas entradas en la diagonal son los grados de los vértices de G.

- $D(G)$, matriz de **distancia**
- $D^L(G) = Tr(G) - D(G)$, matriz **Laplaciana de distancia**
- $D^Q(G) = Tr(G) + D(G)$, matriz **Laplaciana de distancia sin signos**

donde $Tr(G)$ denota la matriz diagonal con la transmisión de los vértices de G.
La transmisión $Tr(v)$ de un vértice v se define como la suma de las distancias desde v a todos los vértices de G.

Definición

*Los eigenvalores de una matriz M se conocen como el M-***espectro** *de G con respecto a la matriz M, y el multiconjunto se denota por M-espectro(G).*

*Las gráficas M-***coespectrales** *son gráficas que comparten el M-espectro.*

Haemers conjeturó que la fracción de gráficas con n vértices con una gráfica M-coespectral tiende a cero como n tiende a infinito.

Algunos resultados enumerativos

- Godsil and McKay (1976) $n \leq 9$ para A
- Haemers and Spence (2004) $n = 10, 11$ para A
- Brouwer and Spence (2009) $n = 12$ para A
- Aouchiche and Hansen (2018) $n \leq 10$ para D, D^L, D^Q

El espectro es una gran herramienta para distinguir gráficas

Nuestro propósito es proponer el uso de la forma normal de Smith (SNF) de ciertas matrices de distancia.

Mostraremos evidencia numérica de que este invariante puede hacer un mejor trabajo en distinguir gráficas.

Dos matrices M y N son **equivalentes** si existen matrices unimodulares P y Q con entradas en $\mathbb{Z}$ tal que $M = PNQ$.

La **forma normal de Smith** de una matriz entera M, denotada por $\mathrm{SNF}(M)$, es la unica matriz diagonal $\mathrm{diag}(f_1, \ldots, f_r, 0, \ldots, 0)$ equivalente a M tal que $r = rango(M)$ y $f_i | f_j$ para $i < j$.

Los **factores invariantes** (o **divisores elementales**) de M son los enteros en la diagonal de la $\mathrm{SNF}(M)$.

Decimos que dos gráficas G y H con M-**coinvariantes** si las SNFs de $M(G)$ y $M(H)$ son las mismas.

Las gráficas coinvariantes fueron introducidas por Andrew Vince en "Elementary Divisors of Graphs and Matroids" (1991).

Denotemos por $\mathcal{G}_n$ al conjunto de gráficas conexas con n vértices.

Sea $\mathcal{G}_n^{sp}(M)$ el conjunto de gráficas en $\mathcal{G}_n$ que tienen al menos una gráfica coespectral en $\mathcal{G}_n$ con respecto a la matriz M.

Sea $\mathcal{G}_n^{in}(M)$ el conjunto de gráficas en $\mathcal{G}_n$ que tienen al menos una gráfica coinvariante en $\mathcal{G}_n$ con respecto a la matriz M.

La **incertidumbre espectral** $\mathrm{sp}_n(M)$ con respecto a M es el cociente $|\mathcal{G}_n^{sp}(M)|/|\mathcal{G}_n|$

La **incertidumbre invariante** $\mathrm{in}_n(M)$ con respecto a M es el cociente $|\mathcal{G}_n^{in}(M)|/|\mathcal{G}_n|$

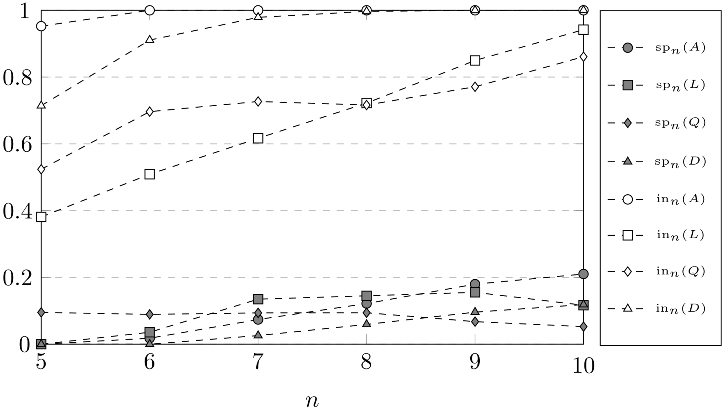

Figure 1: The fraction of graphs on n vertices that have at least one cospectral mate with respect to a certain associated matrix is denoted as *sp*. The fraction of graphs on n vertices with respect to a certain associated matrix that have at least one coinvariant mate is denoted as *in*.

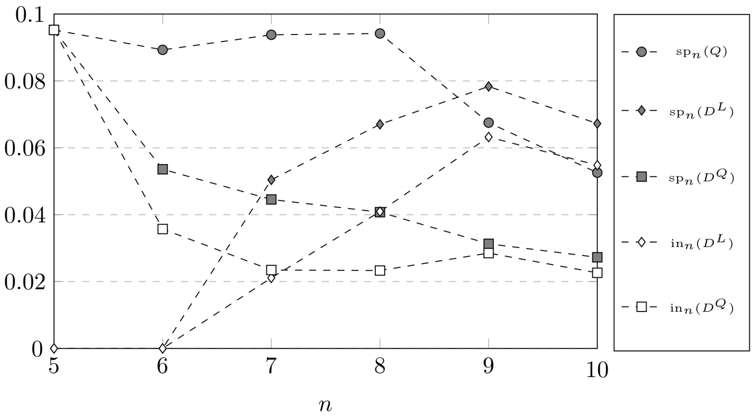

Figure 2: The fraction of graphs on n vertices that have at least one cospectral mate with respect to a certain associated matrix is denoted as *sp*. The fraction of graphs on n vertices with respect to a certain associated matrix that have at least one coinvariant mate is denoted as *in*.

Árboles coespectrales

Aouchiche y Hansen reportaron resultados enumerativos sobre árboles coespectrales con al menos 20 vértices con respecto a D, D^L y D^Q.
Hay dos pares de árboles D-coespectrales entre los 123,867 árboles con 18 vértices.
Hay seis pares de árboles D-coespectrales entre los 317,955 árboles con 19 vértices.
Hay 14 pares de árboles D-coespectral entre los 823,065 árboles con 20 vértices.
Sorprendentemente, no encontraron árboles D^L-coespectrales ni árboles D^Q-coespectrales con 20 vértices.

Conjetura (Aouchiche y Hansen, 2018)

Todo árbol es determinado por su espectro Laplaciano de distancia y por su espectro Laplaciano de distancia sin signo.

Árboles coinvariantes

Hou and Woo extendieron la fórmula de Graham y Pollak, $\det(D(T_{n+1})) = (-1)^n n 2^{n-1}$ para cualquier árbol T_{n+1} con $n+1$ vértices, a la SNF de la matriz de distancia.

Teorema (Hou y Woo, 2008)

Sea T_{n+1} un árbol con $n+1$ vértices, entonces $\mathrm{SNF}(D(T_{n+1})) = \mathrm{I}_2 \oplus 2\mathrm{I}_{\mathrm{n}-2} \oplus (2\mathrm{n})$.

Corolario

Todos los árboles con n vértices son D-coinvariantes.

Árboles coinvariantes

Después de enumerar todos los árboles con a lo más 20 vertices con respecto a D^L y D^Q, no encontramos gráficas D^L-coinvariantes, ni gráficas D^Q-coinvariantes entre los árboles con a lo más 20 vértices.

Conjetura

Los árboles están determinados por la SNF de D^L, y análogamente, por la SNF de D^Q.

Teorema (Abiad, Alfaro, Heysse & Vargas, 2019)

Las gráficas completas están determinadas por la SNF de la matriz D^L.

Teorema (Abiad, Alfaro, Heysse & Vargas, 2019)

Las gráficas estrella están determinadas por la SNF de la matriz D^L.

Teorema (Abiad, Alfaro, Heysse & Vargas, 2019)

Las gráficas completas están determinadas por la SNF de la matriz D^L.

Teorema (Abiad, Alfaro, Heysse & Vargas, 2019)

Las gráficas estrella están determinadas por la SNF de la matriz D^L.

Teorema (Abiad & Alfaro, 2020)

Las gráficas completas están determinadas por la SNF de la matriz D^Q.

¡Gracias por su atención!

Carlos A. Alfaro
alfaromontufar@gmail.com

- A. Abiad and C.A. Alfaro. Enumeration of cospectral and coinvariant graphs. Appl. Math. Comput. 408 (2021), Paper No. 126348.
- A. Abiad, C.A. Alfaro, K. Heysse and M.C. Vargas. Eigenvalues, Smith normal form and determinantal ideals. [arXiv:1910.12502]