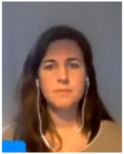
Ideales distancia de gráficas

Seminario de estudiantes

Carlos A. Alfaro



Aida Abiad
Eindhoven University of Technology
Netherlands

Kristin Heysse
Macalester College
USA

Libby Taylor
Stanford University
USA

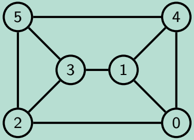
Marcos Vargas
Banco de México
México

Matrices de distancia

Definición

Sea G una gráfica conexa con n vertices.
La distancia $d_G(u,v)$ entre los vertices u y v es el número de aristas en un camino mínimo entre u y v.
La matriz de distancia $D(G)$ de G es la matriz $n \times n$ cuya entrada (u,v) es la distancia $d_G(u,v)$ entre los vertices u and v.

Ejemplo



G

$$D(G) = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrices de distancia

Definiciones

La transmición $Tr(u)$ de u es $\sum_{v \in V(G) \setminus u} d_G(v,u)$.
La transmición $Tr(G)$ de G es la matriz diagonal con las transmiciones de sus vertices en la diagonal.
La matriz de distancia Laplaciana $D^L(G)$ de G es la matriz $Tr(G) - D(G)$.
La matriz de distancia Laplaciana sin signo $D^Q(G)$ de G es la matriz $Tr(G) + D(G)$.

Ejemplo

$$D^L(G) = \begin{bmatrix} 7 & -1 & -1 & -2 & -1 & -2 \\ -1 & -7 & 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 7 & -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 7 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -2 & 7 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & -1 & 7 \end{bmatrix} \quad D^Q(G) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 7 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 7 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

Matrices de distancia

Las matrices de distancia son un área de investigación vibrante

- M. Aouchiche, P. Hansen, Distance spectra of graphs: a survey, Linear Algebra Appl. 458 (2014) 301–386. (81 citas)
- M. Aouchiche, P. Hansen, Two Laplacians for the distance matrix of a graph, Linear Algebra Appl. 439 (2013) 21–33. (66 citas)
- R.L. Graham, H.O. Pollack, On the addressing problem for loop switching, Bell System Tech. J. 50 (1971) 2495–2519. (166 citas)

Forma normal de Smith

Dos matrices M y N son **equivalentes** si exiten matrices P y Q unimodulares (cuadrada, entradas en $\mathbb{Z}$ y det $= 1$ ó -1) tal que $M = PNQ$.

La **forma normal de Smith** de una matriz con entradas enteras M es la unica matriz diagonal $\text{diag}(f_1, \ldots, f_r, 0, \ldots, 0)$ equivalente a M tal que $r = rango(M)$ y $f_i | f_j$ for $i < j$. La denotamos por SNF(M).

Los **factores invariantes** (o **divisores elementales**) de M son los enteros en la diagonal de SNF(M).

Teorema (Divisores elementales)

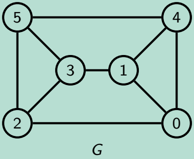
Sea M una matriz con entradas enteras con $f_1, \ldots, f_r, 0, \ldots, 0$ sus factores invariantes. Para $1 \leq k \leq r$, denote por Δ_k el gcd *de los k-menores de M, y $\Delta_0 = 1$. Entonces $f_k = \frac{\Delta_k}{\Delta_{k-1}}$.*

Ideales distancia

Definición

Sea G una gráfica con vértices $V(G) = \{v_0, \ldots, v_{n-1}\}$. Las variables $X_G = \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ son variables asociadas a $V(G)$.
Definimos la matriz $D_X(G) = diag(x_0, \ldots, x_{n-1}) + D(G)$.

Ejemplo



$$D_X(G) = \begin{bmatrix} x_0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & x_1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x_2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & x_3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & x_4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & x_5 \end{bmatrix}$$

Ideales distancia

Definición

Sea $\mathcal{R}[X_G]$ el anillo de polinomios sobre un anillo commutativo $\mathcal{R}$ en las variables X_G.

Denotemos por $\mathrm{menores}_k(D_X(G))$ al conjunto de determinantes de las submatrices de tamaño $k \times k$ de $D_X(G)$.

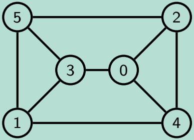
Para $1 \leq k \leq n$, el k-esimo ideal distancia es el ideal $\langle \mathrm{menores}_k(D_X(G)) \rangle$. Y lo denotaremos por $D_k^{\mathcal{R}}(G, X)$.

Decimos que un ideal es trivial si es igual a $\langle 1 \rangle$ $(= \mathcal{R}[X_G])$.

Denotemos por $\Phi_{\mathcal{R}}(G)$ al máximo entero k tal que $D_k^{\mathcal{R}}(G, X)$ es trivial.

Ideales distancia

Ejemplo



G

$$\begin{bmatrix} x_0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & x_1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & x_2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & x_3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & x_4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & x_5 \end{bmatrix}$$

$\Phi_{\mathbb{Z}}(G) = 3$

Una base de Gröbner para $D_4^{\mathbb{Z}}(G, X)$ está generada por los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned} x_0 + x_3 - 7, x_1 + x_4 - 7, x_2 + x_5 - 7, x_3x_4 - 2x_3 - 2x_4 + 7, \\ x_3x_5 - 5x_3 - 2x_5 + 7, 3x_3 - 3x_5, x_4x_5 - 2x_4 - 2x_5 + 7, \\ 3x_4 + 3x_5 - 21, 3x_5^2 - 21x_5 + 21 \end{aligned}$$

Note $D_n^{\mathcal{R}}(G, X) = \langle \det(D_X(G)) \rangle$.

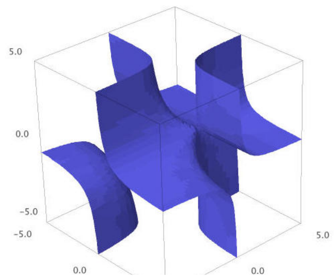
Ideales distancia

Definición

La variedad $V(I)$ del ideal I es el conjunto de las raíces comunes de los polinomios en I.

Ejemplo

Consideremos la gráfica completa K_3 con 3 vertices.
$\Phi_{\mathbb{R}}(K_3) = 1$,
$D_2^{\mathbb{R}}(K_3, X) = \langle x_0 - 1, x_1 - 1, x_2 - 1 \rangle$, con $V(D_2^{\mathbb{R}}(K_3, X)) = \{(1, 1, 1)\}$
$I_3^{\mathbb{R}}(K_3, X_{K_3}) = \langle x_0 x_1 x_2 - x_0 - x_1 - x_2 - 2 \rangle$. y $V(I_3^{\mathbb{R}}(K_3, X_{K_3}))$



Ideales distancia

Se tiene que

$$\langle 1 \rangle \supseteq D_1^{\mathcal{R}}(G, X) \supseteq \cdots \supseteq D_n^{\mathcal{R}}(G, X) \supseteq \langle 0 \rangle.$$

Por lo que

$$V(\langle 1 \rangle) \subseteq V(D_1^{\mathcal{R}}(G, X)) \subseteq \cdots \subseteq V(D_n^{\mathcal{R}}(G, X)) \subseteq V(\langle 0 \rangle).$$

Primeras observaciones

- Las variedades de $D(G,X)$ generalizan el espectro asociado a D, D^L y D^Q,
- Al evaluar los ideales distancia ($\mathbb{Z}[X]$) en $X=0$ ó $X=Tr(G)$ podemos recuperar la SNF de D, D^L y D^Q.

Proposición (A. & Taylor, 2020)

Al evaluar $D_k^{\mathbb{Z}}(G,X)$ en $X=0$ obtenemos un ideal generado por $\Delta_k(D(G))$.
Al evaluar $D_k^{\mathbb{Z}}(G,X)$ en $X=-Tr(G)$ obtenemos un ideal generado por $\Delta_k(D^L(G))$.
Al evaluar $D_k^{\mathbb{Z}}(G,X)$ en $X=Tr(G)$ obtenemos un ideal generado por $\Delta_k(D^Q(G))$.

Primeras observaciones

Ejemplo

$$D_k^{\mathbb{Z}}(K_3, X) = \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } k = 1, \\ \langle x_0 - 1, x_1 - 1, x_2 - 1 \rangle & \text{si } k = 2, \\ \langle x_0 x_1 x_2 - x_0 - x_1 - x_2 + 2 \rangle & \text{si } k = 3. \end{cases}$$

- Al evaluar en $X = 0$

  $$D_i^{\mathbb{Z}}(K_3, X)|_{X=0} = \langle \Delta_i(D(K_3)) \rangle = \begin{cases} \langle 1 \rangle & \text{si } k = 1, \\ \langle 1 \rangle & \text{si } k = 2, \\ \langle 2 \rangle & \text{si } k = 3. \end{cases}$$

  Entonces $\text{SNF}(D(K_3)) = \text{diag}(1, 1, 2)$.
- Al evaluar en $X = (-2, -2, -2)$, obtenemos $\text{SNF}(D^L(G)) = \text{diag}(1, 3, 0)$
- Al evaluar en $X = (2, 2, 2)$, obtenemos $\text{SNF}(D^Q(G)) = \text{diag}(1, 1, 4)$

Primeras observaciones

Se han calculado los ideales distancia para pocas familias:

Teorema (Corrales & Valencia, 2013)

El k-ésimo ideal distancia de la gráfica completa K_n con n vértices es generado por

$$\begin{cases} \prod_{j=1}^{n}(x_j - 1) + \sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(x_j - 1) & \text{si } k = n, \\ \left\{\prod_{j\in\mathcal{I}}(x_j - 1) : \mathcal{I} \subset [n] \text{ y } |\mathcal{I}| = k-1\right\} & \text{si } k < n. \end{cases}$$

Corolario

- $\mathrm{SNF}(D(K_n)) = \mathrm{I}_{n-1} \oplus (n-1)$
- $\mathrm{SNF}(D^L(K_n)) = 1 \oplus n\mathrm{I}_{n-2} \oplus 0$
- $\mathrm{SNF}(D^Q(K_n)) = 1 \oplus (n-2)\mathrm{I}_{n-2} \oplus 2(n-1)(n-2)$

Primeras observaciones

Teorema (A. & Taylor, 2020)

Sea $D_X(K_{m,1}) = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_m) - 2\mathsf{I}_m + 2\mathsf{J}_m & \mathsf{J}_{m,1} \\ \mathsf{J}_{1,m} & y \end{bmatrix}$.

Entonces $\det(D_X(K_{m,1})) = y \prod_{i=1}^{m} (x_i - 2) + (2y - 1) \sum_{i=1}^{m} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m} (x_j - 2)$.

Para $k \in [m]$*, el* k*-ésimo ideal distancia de la gráfica estrella* $K_{m,1}$ *está generado por* $\langle C_k \cup D_k \rangle$*. Donde*

$$C_k = \left\{ \prod_{i \in \mathcal{I}} (x_i - 2) : \mathcal{I} \subset [m] \textit{ and } |\mathcal{I}| = k - 1 \right\} \textit{ y}$$

$$D_k = \left\{ (2y - 1) \prod_{i \in \mathcal{I}} (x_i - 2) : \mathcal{I} \subset [m] \textit{ and } |\mathcal{I}| = k - 2 \right\}.$$

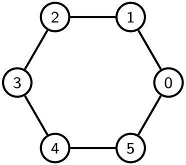
Corolario

- $\mathrm{SNF}(D(K_{m,1})) = \mathsf{I}_2 \oplus 2\mathsf{I}_{m-2} \oplus 2m$
- $\mathrm{SNF}(D^L(K_{m,1})) = 1 \oplus (2m + 1)\mathsf{I}_{m-1} \oplus 0$

Ideales distancia de subgráficas inducidas

En general, los ideales distancia no son monotonos al tomar subgráficas inducidas.

Por ejemplo, considere C_6 y su subgráfica inducida P_5. ¡La distancia de las hojas de P_5 es 2 cuando se consideran como vértices de C_6!



Ideales distancia de subgráficas inducidas

Ed Howorka

Una familia relacionada son las gráficas de distancia hereditaria que fueron introducidas por Howorka en 1977.

Una gráfica es de distancia hereditaria si para cada subgráfica inducida H de G, y cada par de vértices $u, v \in V(H)$, $d_H(u, v) = d_G(u, v)$.

Proposición

Sea G una gráfica de distancia hereditaria. Si H es una subgráfica conexa inducida de G, entonces $D_k^{\mathcal{R}}(H, X_H) \subseteq D_k^{\mathcal{R}}(G, X_G)$ para todo $k \leq |V(H)|$, y $\Phi_{\mathcal{R}}(H) \leq \Phi_{\mathcal{R}}(G)$.

Ideales distancia de subgráficas inducidas

Propiedades de las gráficas de distancia hereditaria:

- son gráficas perfectas, es decir, el número cromático de cada subgráfica inducida es igual al tamaño del mayor clique de ese subgráfica.

Teorema (Fuerte de las gráficas perfectas, Chudnovsky, et. al., 2006)

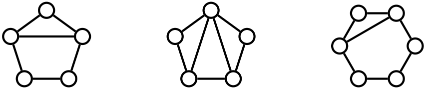
Una gráfica G es perfecta si y sólo si G y $\overline{G}$ **no** *contienen un ciclo inducido de longitud impar mayor o igual a 5.*

M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, R. Thomas, The strong perfect graph theorem, **Ann. Math.** 164 (1) (2006) 51–229.

Ideales distancia de subgráficas inducidas

Propiedades de las gráficas de distancia hereditaria:

- se caracerizan por ser gráficas que no tienen una casa, un domino, una gema o un ciclo de longitud de 5 o mayor.



casa gema domino

Ideales distancia de subgráficas inducidas

Lema

P_4 y cualquier gráfica que contenga P_4 como subgráfica inducida tiene segundo ideal distancia trivial.

Prueba. Sea $P_4 = v_1 - v_2 - v_3 - v_4$. Considere G una gráfica que contiene a P_4 como subgráfica inducida. La única manera de reducir la distancia entre cualesquiera dos vértices de P_4 en G es que G tenga un vértice u adjacente a v_1 y v_4. Supongamos que es así. Entonces $D_X(G)$ contiene la siguiente submatriz

$$M = D_X(G)[V(P_4) \cup \{u\}; V(P_4) \cup \{u\}] = \begin{bmatrix} x_1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ \boxed{1} & x_2 & \boxed{1} & 2 & a \\ 2 & 1 & x_3 & 1 & b \\ \boxed{2} & 2 & \boxed{1} & x_4 & 1 \\ 1 & a & b & 1 & x_u \end{bmatrix}$$

Como $\det(M[\{v_2, v_4\}; \{v_1, v_3\}]) = -1$, entonces $D_2^{\mathcal{R}}(G, X_G) = \langle 1 \rangle$.

Ideales distancia de subgráficas inducidas

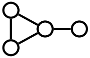
Es decir, P_4 es **prohibida** para las gráficas con un único ideal distancia trivial.
¿Podemos caracterizar las gráficas con 1 ideal distancia trivial?

Ideales distancia de subgráficas inducidas

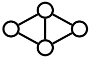
Teorema (A. & Taylor,2020)

Para G una gráfica simple conexa los siguientes son equivalentes:

1. *G tiene solo 1 ideal distancia trivial sobre $\mathbb{Z}[X]$.*
2. *G es $\{P_4, \mathrm{paw}, \mathrm{diamond}\}$-libre.*
3. *G es una subgráfica inducida de $K_{m,n}$ o K_n.*



paw



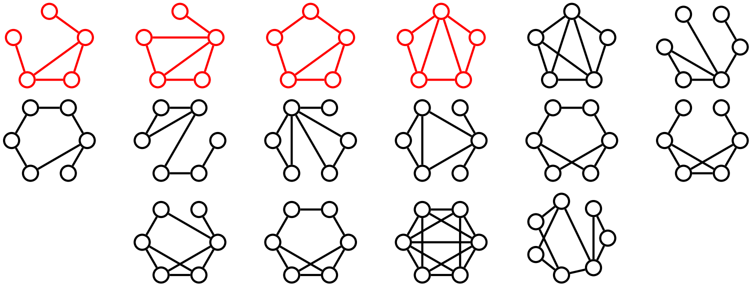
diamond

Teorema (A. & Taylor,2020)

Para G una gráfica simple conexa los siguientes son equivalentes:

1. *G tiene solo 1 ideal distancia trivial sobre $\mathbb{R}[X]$.*
2. *G es $\{P_4, \mathrm{paw}, \mathrm{diamond}, C_4\}$-libre.*
3. *G es una subgráfica inducida de $K_{1,n}$ o K_n.*

Ideales distancia de subgráficas inducidas



Teorema (A., 2020)

Las gráficas con 2 ideales distancia triviales sobre $\mathbb{Z}[X]$ *son libres de las 16 gráficas de arriba y de los ciclos de longitud impar mayores o iguales a 7.*

Ideales distancia de subgráficas inducidas

Una aplicación en encontrar la caracterización de Λ_2 (las graficas con 2 ideales distancia triviales sobre $\mathbb{Z}[X]$) es que de esa caracterización podemos obtener la caracterización de las gráficas cuyas matrices de distancia tienen 2 factores invariantes iguales a 1, puesto que estan contenidas en Λ_2.

Hou

Woo

Yaoping Hou y Ching Wah Woo demostraron que los árboles tienen exactamente 2 factores invariantes iguales a 1. Por lo que

$$\text{árboles} \subseteq \Lambda_2 \subseteq \text{gráficas } \{F, \text{odd-holes}\}\text{-libres.}$$

¿Cual será la clasificacion de Λ_2?
¿Será posible describir los ideales distancia de los árboles?
¿las gráficas bipartitas completas?

Gráficas codeterminantales

Un isomorfismo de gráficas es una biyección f entre los vértices de una gráfica G a una gráfica H que preserva la adyacencia. Si existe un isomorfismo entre dos gráficas G y H, decimos que son isomorfas.

El problema del isomorfismo de gráficas es el problema computacional para determinar si dos gráficas finitas son isomórfas.

No se sabe si el problema puede resolverse en tiempo polinomial ni que sea NP-completo, por lo que puede estar en una clase de complejidad intermedia.

Se suele aproximar el problema al checar si las gráficas son coespectrales, ya que es más facil checar coespectralidad.

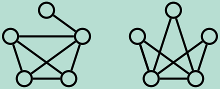
Gráficas codeterminantales

Definición

Dos gráficas G y H no isomorfas son M-coespectrales si las matrices $M(G)$ y $M(H)$ tienen los mismos multiconjuntos de eigenvalores.

M puede ser alguna de las matrices D, D^L, D^Q, A, L ,Q, ...

Ejemplo



DF{ DT{

Gráficas D^Q-coespectrales cuyo D^Q-espectro es

$[-2112, 2480, -1132, 249, -26, 1]$

Definición

Una gráfica se dice ser determinanda por su espectro si cualquier otra gráfica con el mismo espectro es isomorfa a ella.

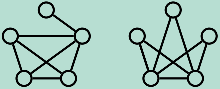
Gráficas codeterminantales

Definición

Dos gráficas G y H no isomorfas son M-coinvariantes si las matrices $M(G)$ y $M(H)$ tienen la misma forma normal de Smith (SNF).

M puede ser alguna de las matrices D, D^L, D^Q, A, L ,Q, ...

Ejemplo



DF{ DT{

Gráficas D^Q-coinvariantes cuya D^Q-SNF es $\mathrm{diag}(1, 1, 4, 4, 132)$

Definición

Una gráfica se dice ser determinanda por su SNF si cualquier otra gráfica con la misma SNF es isomorfa a ella.

Gráficas codeterminantales

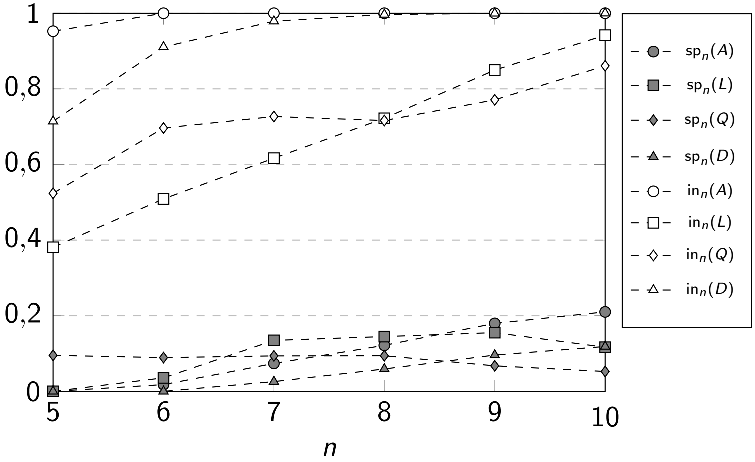


Figura: $sp(M)$ denota la fracción de gráficas en n vértices que tienen al menos una gráfica M-coespectral. $in(M)$ denota la fracción de gráficas en n vértices que tienen al menos una gráfica M-coinvariante.

Gráficas codeterminantales

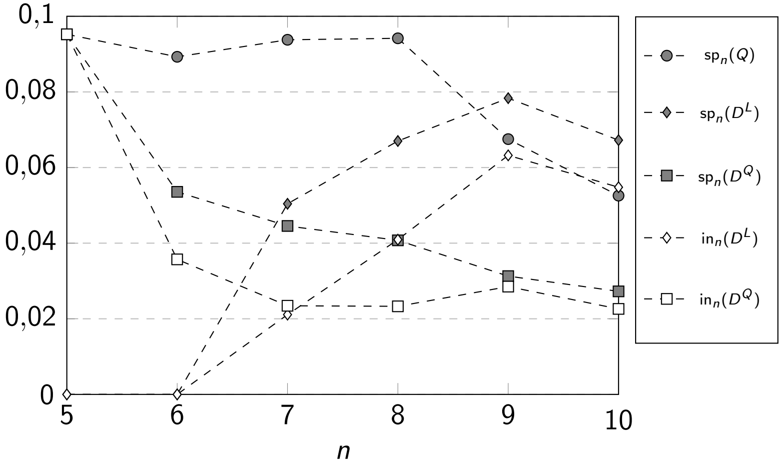


Figura: $sp(M)$ denota la fracción de gráficas en n vértices que tienen al menos una gráfica M-coespectral. $in(M)$ denota la fracción de gráficas en n vértices que tienen al menos una gráfica M-coinvariante.

Gráficas codeterminantales

Teorema (Abiad, A., Heysse & Vargas, 2019)

Las gráficas completas están determinadas por la SNF de la matriz D^L.

Teorema (Abiad, A., Heysse & Vargas, 2019)

Las gráficas estrella están determinadas por la SNF de la matriz D^L.

Teorema (Abiad, A., 2021)

Las gráficas completas están determinadas por la SNF de la matriz D^Q.

Gráficas codeterminantales

Aouchiche

Hansen

Aouchiche y Hansen reportaron lo siguiente sobre árboles coespectrales de a lo más 20 vértices con respecto a D, D^L and D^Q.

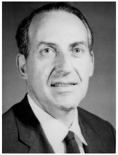
n	18	19	20
# árboles	123,867	317,955	823,065
D-coespectrales	4	12	28
D^L-coespectrales	0	0	0
D^Q-coespectrales	0	0	0

Conjetura (Aouchiche & Hansen, 2018)

Los árboles están determinados por el espectro de D^L, y el espectro de D^Q.

Gráficas codeterminantales

Ron Graham



Henry O. Pollak

Hou y Woo extendieron la celebrada formula de Graham y Pollak $\det(D(T_{n+1})) = (-1)^n n 2^{n-1}$.

Teorema (Hou & Woo, 2008)

Sea T_{n+1} un árbol con $n+1$ vértices, entonces $\mathrm{SNF}(D(T_{n+1})) = \mathrm{I}_2 \oplus 2\mathrm{I}_{\mathrm{n}-2} \oplus (2\mathrm{n})$.

Corolario

Todos los árboles de n vértices son D-coinvariantes.

Gráficas codeterminantales

No hay árboles D^L-coinvariantes ni árboles D^Q-coinvariantes de hasta con 20 vértices.

Conjetura (Abiad & A., 2021)

Los árboles están determinados por la SNF de D^L, y la SNF de D^Q.

Gráficas codeterminantales

Teorema

Sean G y H dos gráficas de n vértices. Entonces, G y H son isomorfas si y sólo si existe una permutación σ de $V(H)$ tal que $D_n^{\mathcal{R}}(G, X) = D_n^{\mathcal{R}}(\sigma H, \sigma X)$.

Gráficas codeterminantales

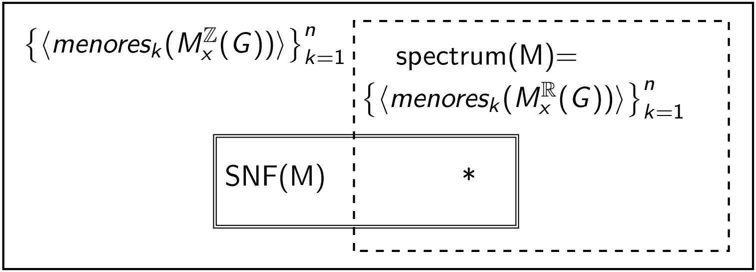
Definimos $M_x(G) = x\mathrm{I_n} - M(G)$. Donde M puede ser alguna de las matrices D, D^L, D^Q, A, L ,Q, ...

Definition

Dos gráficas G y H son $M_x^{\mathcal{R}}$-*codeterminantales* si

$$\langle menores_k(M_x^{\mathcal{R}}(G))\rangle = \langle menores_k(M_x^{\mathcal{R}}(H))\rangle \subseteq \mathcal{R}[x]$$

para cada $k \in [n]$.



Gráficas codeterminantales

n	N	$D_x^{\mathbb{Q}}$	$D^{\mathbb{Z}}$	$D_x^{\mathbb{Z}}$	$D{L_x}^{\mathbb{Q}}$	$D{L}^{\mathbb{Z}}$	$D{L_x}^{\mathbb{Z}}$
5	21	0	15	0	0	0	0
6	112	0	102	0	0	0	0
7	853	22	835	0	43	18	8
8	11,117	658	11,080	186	745	455	130
9	261,080	25,058	260,991	8,785	20,455	16,505	7,085

Cuadro: Número de gráficas conexas con una gráfica $M_x^{\mathcal{R}}$-codeterminantal. El número de vértices es denotado por n y el número de gráficas conexas con n vértices es denotado por N.

Referencias

- C.A. Alfaro & L. Taylor, *Distance ideals of graphs.* **Linear Algebra Appl.** 584 (2020) 127–144. F.I.: 0.988
- C.A. Alfaro, *On graphs with two trivial distance ideals.* **Linear Algebra Appl.** 597 (2020) 69–85. F.I.: 0.988
- A. Abiad & C.A. Alfaro, *Enumeration of cospectral and coinvariant graphs.* **Appl. Math. Comput.** 408 (2021) 126348. F.I.: 3.472
- A. Abiad, C.A. Alfaro, K. Heysse & M. Vargas, *Eigenvalues, Smith normal form and determinantal ideals* **arXiv preprint** arXiv:1910.12502

¡Gracias!

Carlos A. Alfaro
alfaromontufar@gmail.com