



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE HIDALGO  
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA  
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS

---

# Teoría de Nudos y sus Aplicaciones al DNA

Tesis que para obtener el título de

LICENCIADO EN MATEMÁTICAS APLICADAS

presenta

Carlos Alejandro Alfaro Montúfar

bajo la dirección de

Dra. Olivia Carolina Gutú Ocampo  
Dr. Roberto López Hernández

Pachuca, Hidalgo. Febrero de 2008.



---

## Resumen

---

En esta tesis se introduce la teoría clásica de nudos y las nociones topológicas de enredos y 4-planos. A partir de estos conceptos, se presenta un modelo que explica la recombinación específica de sitio para ciertas enzimas que actúan en moléculas de DNA circular.

---

## Abstract

---

In this thesis work we introduce classic knot theory and the topological notions of tangles and 4-plats. Based on those concepts, we show a model that explains the site-specific recombination for certain enzymes that act on circular DNA molecules.





*Esta tesis está dedicada a mis padres  
y a la memoria de Natalia Cuenca Martínez  
y Francisco Alfaro Cuenca*



---

## Agradecimientos

---

Es mi deber agradecer a todas las personas que estuvieron involucradas en la realización de este proyecto. En primer lugar, mi familia quienes me han brindado apoyo y sabios consejos. Estoy infinitamente agradecido con los Doctores Olivia Carolina Gutú Ocampo y Roberto López Hernández por el tiempo que dedicaron a la realización de este trabajo. De igual manera quiero expresar mi gratitud a los Doctores Julio Hugo Toloza, María del Carmen Sánchez y Hugh R. Morton por los artículos que me facilitaron. Finalmente, agradezco a mis amigos Adrián, Fidel, Liliana, Roberto y Ronald por todo el apoyo que me brindaron durante mis estudios.



---

## Índice general

---

<b>Resumen</b>	iii
<b>Abstract</b>	iii
<b>Dedicatoria</b>	v
<b>Agradecimientos</b>	vii
<b>Introducción</b>	1
<b>1. Definiciones Básicas</b>	<b>3</b>
1.1. Nudos . . . . .	3
1.2. Suma Conexa . . . . .	9
1.3. Enlaces . . . . .	11
1.4. Diagramas Regulares . . . . .	12
1.5. Movimientos de Reidemeister . . . . .	14
<b>2. Invariantes</b>	<b>19</b>
2.1. Número de cruce . . . . .	19
2.2. Número de enlace . . . . .	21
2.3. Coloración . . . . .	24
2.4. Polinomio de Jones . . . . .	27
<b>3. 4-Planos y Enredos Racionales</b>	<b>35</b>
3.1. Enredos Racionales . . . . .	35
3.2. 4-Planos . . . . .	40
3.3. Ecuaciones de enredos . . . . .	42

<b>4. Aplicación al DNA</b>	<b>45</b>
4.1. Conceptos generales del DNA . . . . .	45
4.2. Recombinación específica de sitio . . . . .	46
4.3. Modelación con enredos . . . . .	48
4.4. Resolvasa Tn3 . . . . .	50
<b>A. KnotJ3D</b>	<b>53</b>
A.1. Utilización . . . . .	54
A.2. Código . . . . .	56
<b>Bibliografía</b>	<b>57</b>

---

## Introducción

---

Los nudos han sido parte de la humanidad desde varios siglos atrás y prácticamente desde su aparición nos hemos interesado en entenderlos [14]. La teoría de nudos ya había sido estudiada por muchos matemáticos y físicos pero tuvo un resurgimiento a partir de que se ha podido aplicar exitosamente al estudio del funcionamiento de los procesos que transforman al DNA [1].

En este trabajo expondremos a manera de introducción la teoría de nudos y su aplicación al estudio del DNA. Los temas que consideramos fueron elegidos principalmente para modelar el proceso de recombinación del DNA. Nuestro trabajo está ordenado de la siguiente forma:

En el Capítulo 1 estudiaremos la definición de nudo, obtendremos la definición de equivalencia de nudos y presentaremos algunos tipos de nudos. Además obtendremos que dos nudos poligonales son equivalentes si y sólo si sus correspondientes diagramas regulares pueden ser transformados por un número finito de movimientos de Reidemeister (Teorema 1.15), este resultado nos servirá para probar la invariancia en el Capítulo 2.

En el Capítulo 2 abordaremos uno de los problemas fundamentales en la teoría de nudos que es: decidir si dos nudos son de diferente tipo. Para ello introduciremos la definición de invariante y revisaremos algunos de ellos, tales como el número de cruce y el polinomio de Jones. Como consecuencia demostraremos que el nudo trivial y el trébol son distintos. Obtendremos que el polinomio de Jones es un invariante de nudos anaqueirales (Teorema 2.14), que será utilizado en el Capítulo 4 para probar el Corolario 4.2.

El Capítulo 3 está dedicado al estudio de los enredos (*tangles*) y 4-planos (*4-*

*plats*), que junto con las operaciones cerradura y suma nos permite formar ecuaciones. Al final del Capítulo revisaremos las posibles soluciones a la ecuación  $\mathbf{N}(X + A) = K$ , donde  $A$  es un enredo racional y  $K$  es un 4-plano, estos resultados serán utilizados en el Capítulo 4.

En el Capítulo 4 daremos una introducción breve del DNA y utilizaremos herramientas desarrolladas en los capítulos anteriores para explicar el modelo que describe el proceso de recombinación del DNA. Revisaremos específicamente el caso en que la recombinasa es Tn3 Resolvasa y obtendremos la mayoría de enredos racionales que están involucrados en la recombinación (Corolario 4.2).

Como complemento decidimos desarrollar la herramienta *KnotJ3D*, que nos ayudará (en los Capítulos 3 y 4) a simular enredos y nudos. En el apéndice daremos las características del software y las instrucciones para utilizarlo. Además daremos el algoritmo que utilizamos para crear los enredos a partir de una sucesión de números.



# CAPÍTULO 1

---

## Definiciones Básicas

---

En este capítulo daremos las definiciones básicas de la teoría de nudos, dándole peso a los conceptos que utilizaremos en los capítulos posteriores.

### 1.1 Nudos

El objetivo de esta sección es introducir la definición de nudo y a partir de este concepto nos daremos a la búsqueda de la definición de equivalencia de nudos.

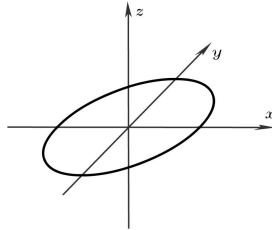
Sean  $X, Y$  subespacios de  $\mathbb{R}^3$ . Una función  $f : X \rightarrow Y$  es un *homeomorfismo* si  $f$  es continua, biyectiva y  $f^{-1}$  es continua.

Al conjunto  $\{(x, y, 0) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  le llamaremos  $S^1$ .

**Definición 1.1.** El subconjunto  $K$  de  $\mathbb{R}^3$  es un *nudo* si existe un homeomorfismo de  $S^1$  sobre  $K$ .

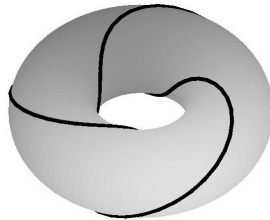
De la definición de nudo podemos pensar un nudo como una cuerda que no se interseca a sí misma, que está pegada en los extremos y está hecha de un material maleable, es decir lo podemos estirar o torcer y no se romperá.

Ahora podemos dar un primer ejemplo, al conjunto  $S^1$  le llamaremos *nudo trivial*, el cual podemos parametrizar por la función  $f(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ .



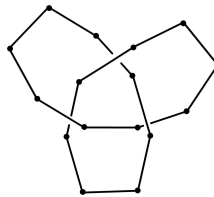
El siguiente nudo que conoceremos es el *nudo trébol* que tiene como función paramétrica a

$$f(t) = ((2 + \cos 3t) \cos 2t, (2 + \cos 3t) \sin 2t, \sin 3t)$$



**Definición 1.2.** Un *nudo poligonal* es el que está formado por medio de una unión finita de segmentos cerrados llamado *aristas* de modo que se intersecan sólo en los extremos llamados *vértices*.

Así tenemos que una forma poligonal del nudo trébol es:



Enseguida nos daremos a la búsqueda de una definición de “igualdad” entre nudos. Lo primero que debemos notar es que cualesquiera dos nudos son homeomorfos al círculo unitario por lo tanto son homeomorfos entre si. Por lo que el espacio en el que está nuestro nudo debe transformarse por completo y continuamente modificando el nudo en el otro.

Diremos que dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son *semejantes* si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que  $h(K_1) = K_2$ .

De la definición anterior podemos notar que si tenemos un espejo junto a un nudo el reflejo de éste sobre el espejo es semejante al original.

Por ejemplo, el nudo trébol dextrógiro se puede parametrizar por la función

$$f(t) = ((2 + \cos 3t) \cos 2t, (2 + \cos 3t) \sin 2t, \sin 3t)$$

y el nudo trébol levógiro por la función

$$g(t) = ((2 + \cos 3t) \cos 2t, (2 + \cos 3t) \sin 2t, -\sin 3t),$$

estos son semejantes ya que el homeomorfismo  $h(x, y, z) = (x, y, -z)$  lleva el nudo trébol dextrógiro al nudo trébol levógiro.

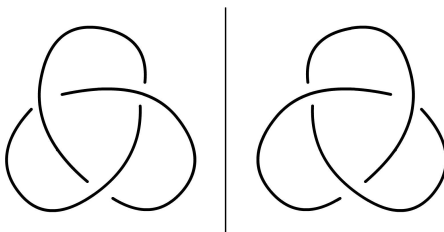
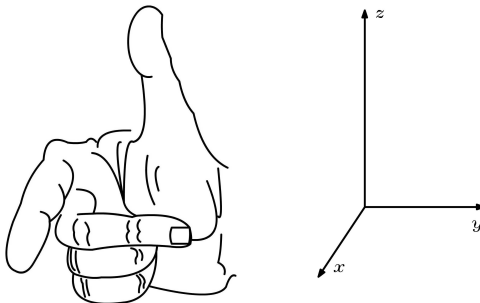


Figura 1.1: Nudo trébol dextrógiro y levógiro

Sin embargo si construimos con una cuerda a alguno de ellos no es posible transformarlo en el otro (la prueba se dará en la Sección 2.4), para arreglar este problema consideraremos las siguientes definiciones.

Físicamente la orientación positiva la podemos observar con la regla de la mano derecha, si en la mano derecha el dedo índice representa el eje  $x$  y el dedo de en medio representa el eje  $y$  entonces el eje  $z$  estará representado por el dedo pulgar, análogamente la orientación negativa se tiene con la mano izquierda.



Trataremos la definición de homeomorfismo que preserva o invierte la orientación de manera intuitiva pues un tratamiento más riguroso de este concepto está dado por teoría de homología<sup>1</sup>. La idea es que un homeomorfismo preserva la orientación si la imagen de una orientación positiva es una orientación positiva e invierte la orientación si la imagen de una orientación positiva es una orientación negativa.

Si un homeomorfismo es una transformación lineal, el homeomorfismo preserva la orientación si el determinante asociado es positivo e invierte la orientación si el determinante asociado a la transformación es negativo.

Decimos que un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un *difeomorfismo* si  $h$  y  $h^{-1}$  son de clase  $C^1$ . Además  $h$  preserva la *orientación* si

$$\det(h'(x)) > 0 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^3.$$

**Definición 1.3.** Dos nudos  $K_1$  y  $K_2$  son *equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que preserva la orientación, tal que  $h(K_1) = K_2$ . La equivalencia entre nudos  $K_1$  y  $K_2$  la denotaremos por

$$K_1 \cong K_2.$$

La interpretación física de esta definición es la que estábamos buscando, ya que al decir que dos nudos son equivalentes estamos diciendo que podemos construir un nudo con una cuerda y podemos transformarlo en el otro sin romper la cuerda.

Decidir si dos nudos son equivalentes no tiene sentido cuando los nudos están en  $\mathbb{R}^n$  con  $n \neq 3$ . Si tenemos un rizo (un nudo) en  $\mathbb{R}^2$  el Teorema de Schoenflies nos dice que existe un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$  del rizo con el círculo unitario [5, Hecho 2.4.4]. Cuando tenemos un nudo en  $\mathbb{R}^n$  con  $n > 3$  hay suficiente espacio para desanudar al nudo [1, Capítulo 10].

Más adelante daremos criterios para decidir si dos nudos son equivalentes, por lo pronto podemos adelantar que el nudo trébol y el nudo trivial no son equivalentes.

**Definición 1.4.** Un nudo es *dócil* si es equivalente a un nudo poligonal. De otra forma el nudo es *salvaje*.

---

<sup>1</sup>Un homeomorfismo  $k$  de la  $n$ -esfera  $S^n$ ,  $n \geq 1$ , en sí mismo preserva o invierte la orientación de acuerdo a si el isomorfismo  $k_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$  es o no la identidad. Sea  $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  la compactificación por un punto del  $n$ -espacio cartesiano real  $\mathbb{R}^n$ . Cualquier homeomorfismo  $h$  de  $\mathbb{R}^n$  en sí mismo tiene una única extensión al homeomorfismo  $k$  de  $S^n$  en sí mismo definida por  $k|_{\mathbb{R}^n} = h$  y  $k(\infty) = \infty$ . Entonces,  $h$  preserva o invierte la orientación de acuerdo a si  $k$  preserva o invierte la orientación [6, Página 8].

La Figura 1.2 muestra un nudo salvaje [8], conforme nos acercamos a  $p$  por la derecha se va haciendo pequeño y los rizos aumentan. Además podemos notar que es diferenciable en todos los puntos excepto en  $p$ . Sin embargo, no trataremos con nudos salvajes debido a que en temas posteriores necesitamos que los nudos sean dóciles. Por lo que de ahora en adelante nos referimos a un nudo dócil como un nudo.

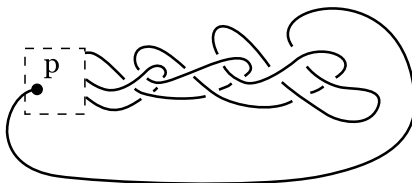


Figura 1.2: Nudo salvaje

**Teorema 1.5.** *Un nudo que es la imagen de un difeomorfismo de  $S_1$  es homeomorfo a un nudo poligonal.*

La demostración del teorema anterior no es trivial y se encuentra en el apéndice 1 de [6].

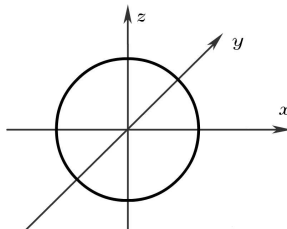
Ahora nos enfocaremos a estudiar otra clase de nudos.

La *imagen especular* de un nudo  $K$  es la imagen de  $K$  bajo la reflexión definida por

$$R(x, y, z) = (x, y, -z)$$

Un nudo  $K$  es *anfiqueiral* si y sólo si existe un homeomorfismo que preserve la orientación de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^3$  y manda  $K$  a su imagen especular.

Un ejemplo muy sencillo es el nudo trivial  $K = \{(x, 0, z) | x^2 + z^2 = 1\}$  ya que su imagen especular es el mismo  $K$ .



Otro ejemplo no trivial es el nudo 8 dextrógiro que es anfiqueiral a el nudo 8 levógiro como se muestra en la Figura 1.3.

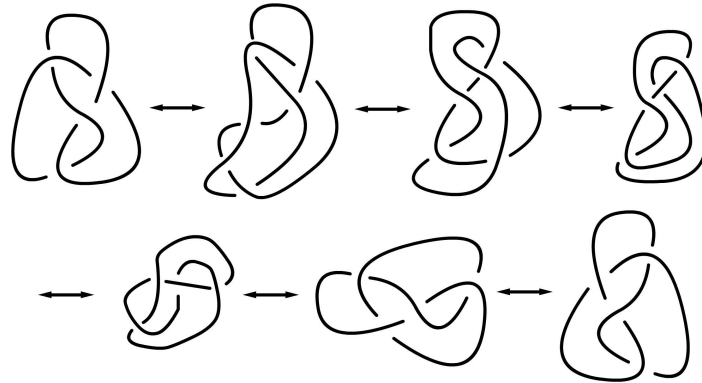
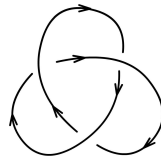


Figura 1.3: Nudo anfiqueiral

La *dirección* de un nudo se define al elegir la dirección en la que se recorre el nudo. Esta dirección la señalamos colocando flechas a lo largo del nudo.



En los libros [1, Página 10], [3, Página 17], [5, Página 16] y [11, Página 5] la definición anterior se suele encontrar como *orientación*.

Un nudo dirigido  $K$  es *invertible* si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , que preserva la orientación e invierte la dirección del nudo, tal que

$$h(K) = K.$$

Es decir, un nudo dirigido es invertible si lo podemos deformar en sí mismo pero invirtiendo su dirección. Los nudos trébol y 8 son ejemplos de nudos invertibles, ya que basta rotarlos para tener la dirección opuesta.

Para comprobar que el nudo trébol dextrógiro es invertible se le debe aplicar el homeomorfismo  $h(x, y, z) = (-x, y, -z)$  con el que obtenemos al nudo

$$f(t) = (-(2 + \cos(3t)) \cos(2t), (2 + \cos(3t)) \sin(2t), -\sin(3t))$$

que están representados en la Figura 1.4.

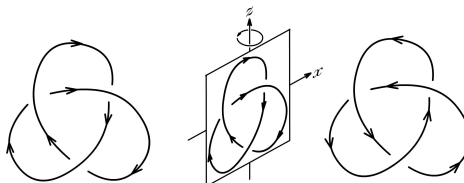
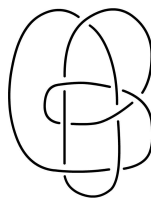


Figura 1.4: Nudo Invertible

La existencia de nudos no invertibles fue probada por H. F. Trotter [19] en 1963. El nudo no invertible más sencillo es el  $8_{17}$  [10].

Nudo  $8_{17}$ 

## 1.2 Suma Conexa

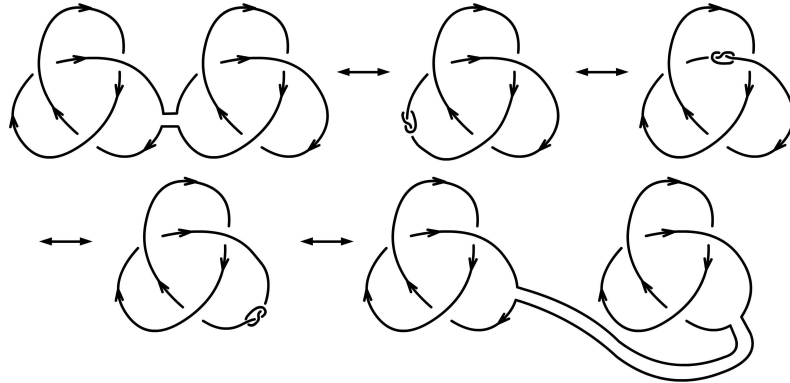
En esta sección veremos una operación entre dos nudos, conocida como suma conexa, que nos servirá para definir un tipo de nudo que será utilizado para clasificar algunos nudos en el Capítulo 3.

A partir de dos nudos dirigidos  $K$  y  $J$  podemos obtener otro nudo al quitarle un arco a cada nudo y unirlos de manera que las direcciones coincidan. A esta operación le llamamos *suma conexa* y la denotamos por  $K \# J$ .

Es importante que las direcciones coincidan ya que si no se tiene la misma dirección es probable que la suma conexa sea distinta. Para observar esto basta tomar la suma conexa de dos nudos no invertibles [1, Página 11].

La suma conexa cumple con las siguientes propiedades:

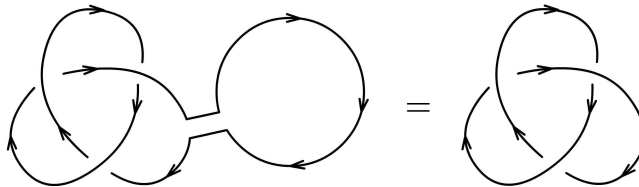
1. Está bien definida, i.e. la suma conexa de dos nudos no depende de los lugares donde se unan. No importa donde se haga la suma el resultado es el mismo.



2. Es asociativa, i.e.  $K_1 \# (K_2 \# K_3) = (K_1 \# K_2) \# K_3$ .

3. Es conmutativa, i.e.  $K_1 \# K_2 = K_2 \# K_1$ .

La suma conexa entre un nudo  $K$  y el nudo trivial resulta  $K$ .



**Definición 1.6.** Un nudo  $K$  es *primo* si puede ser obtenido únicamente de la suma conexa del nudo  $K$  y el nudo trivial.

Contrario a lo que pudiéramos pensar los nudos dirigidos con la suma conexa están muy lejos de ser un grupo ya que ningún nudo a excepción del nudo trivial tienen inversa, esto lo podemos ver con el siguiente resultado.

**Teorema 1.7.** Sea  $K_1$  un nudo dirigido no trivial. Entonces para todo nudo dirigido  $K_2$ , el nudo  $K_1 \# K_2$  es no trivial.

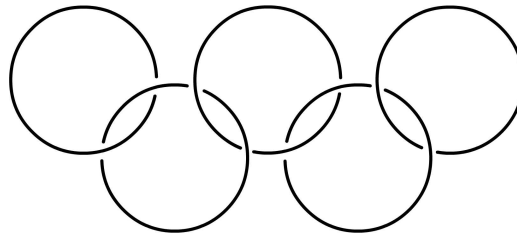
La demostración del teorema anterior se encuentra en [11, Teorema 2.2] o bien ver [5, Teorema 4.6.1].



## 1.3 Enlaces

En esta sección introduciremos el concepto de enlace y de manera análoga a los nudos, daremos la definición de equivalencia en enlaces. Dado que los nudos son una clase de enlace, en lo que sigue los resultados de enlaces se aplican a los nudos.

Los aros olímpicos son un conjunto de nudos que no se intersecan entre sí, éste es un ejemplo de lo que conoceremos por enlace.

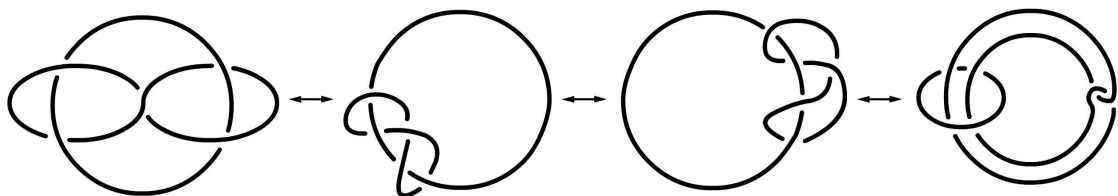


**Definición 1.8.** Un *enlace* es un conjunto finito ordenado de nudos que no se intersecan entre sí. A cada nudo le llamamos *componente* del enlace.

De manera análoga a los nudos, queremos una definición de equivalencia de enlaces, la cual la podemos definir como sigue.

**Definición 1.9.** Sean  $L := \{K_1, K_2, \dots, K_n\}$  y  $L' := \{K'_1, K'_2, \dots, K'_n\}$  enlaces. Decimos que  $L$  y  $L'$  son *equivalentes* si existe un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que preserva la orientación tal que  $h(K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_n) = K'_1 \cup K'_2 \cup \dots \cup K'_n$ .

El primero y el último de los siguientes enlaces son equivalentes y son conocidos como los enlaces Whitehead.



## 1.4 Diagramas Regulares

Esta sección es esencial, pues describiremos la forma más común y sencilla de representar enlaces, que hemos estado utilizando implícitamente y usaremos en lo que sigue para referirnos a enlaces.

En la Figura 1.1 mostramos el dibujo de un nudo trébol pero realmente lo que estamos viendo es una proyección de éste sobre el plano. A este tipo de dibujos se les llama *diagramas regulares*.

La *proyección* de un enlace  $L$  es la imagen de él bajo la función

$$D(x, y, z) = (x, y, 0)$$

Podemos ver que la proyección de un nudo es una curva cerrada, no necesariamente simple, que preserva la dirección.

Un punto  $p$  se dice que es un *punto de cruce* si  $|D^{-1}(p) \cap L| > 1$ , donde  $L$  es el enlace. A  $|D^{-1}(p) \cap L|$  le llamaremos el orden de  $p$ . A un punto de cruce de orden dos se le llama punto doble, a un punto de cruce de orden tres se le llama punto triple y así sucesivamente. Notemos que si  $p$  es un punto de cruce de orden 2, puede tener las formas de la Figura 1.5. El punto de cruce en el dibujo (b) de la Figura 1.5 es conocido como *vértice*.

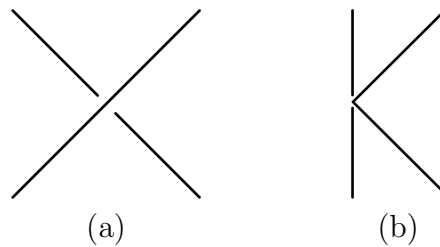


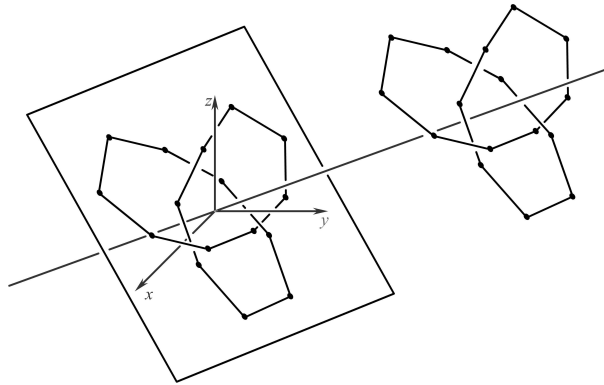
Figura 1.5: Tipos de Cruces

Decimos que un enlace  $L$  está en *posición regular* si todos los puntos de cruce son dobles y no están en forma de vértice. A la proyección que cumple lo anterior se le llama *proyección regular*.

El siguiente resultado no nos parecerá raro.

**Teorema 1.10.** *Todo nudo poligonal es equivalente bajo una rotación de  $\mathbb{R}^3$  a un nudo poligonal en posición regular.*

*Demostración.* Fijemos al nudo poligonal  $K$ . Ahora consideremos al espacio proyectivo  $\mathbb{P}^2$  visto como el conjunto de direcciones en  $\mathbb{R}^3$  (líneas rectas que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^3$ ). A cada dirección le asociamos el plano con centro el origen y perpendicular a la dirección y la proyección regular respecto a ese plano.



Consideremos un vértice  $v$  (Definición 1.2) y una arista  $a$  de  $K$  de modo que la arista no sea adyacente al vértice. Cada línea recta que pasa por  $v$  y uno de los puntos de  $a$  es paralela a una dirección. Las direcciones que cumplen con lo anterior forman una unión finita de segmentos de direcciones en  $\mathbb{P}^2$ . Al conjunto de tales direcciones las denotaremos por  $Q_1$ . Las proyecciones que corresponden a las direcciones en  $\mathbb{P}^2 - Q_1$  cumplen que no tienen vértices (Fig. 1.5). Ahora consideremos tres aristas de  $K$  (hay un número finito de ellas) y consideremos las líneas rectas que pasan por las tres aristas, las direcciones paralelas a éstas líneas forman una sección cónica en  $\mathbb{P}^2$ . La unión de todas las direcciones que cumplen con lo anterior, que denotaremos por  $Q_2$ , es una unión finita de secciones cónicas en  $\mathbb{P}^2$ . De lo anterior concluimos que  $Q_1 \cup Q_2$  es denso en ninguna parte de  $\mathbb{P}^2$ .

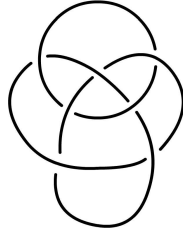
Notemos que las direcciones asociadas a las proyecciones con puntos de cruce de orden mayor o igual a 3 están contenidos en  $Q_2$ . Por lo que el conjunto de direcciones que tienen asociadas a proyecciones no regulares está contenida en  $Q_1 \cup Q_2$ , como consecuencia podemos encontrar un nudo poligonal en posición regular rotando al original. ■

En una proyección regular no sabemos si en un punto de cruce el nudo pasa por arriba o por abajo. Para evitar esto podemos dibujarla de manera cortada tal que parezca que pasa por arriba. A este dibujo le llamaremos *diagrama regular*.

Si un enlace  $L$  tiene un diagrama regular tal que se puede recorrer de forma

alternada, sobre y debajo, por los punto de cruce, al diagrama le llamamos *diagrama alternante*.

Un ejemplo claro es el diagrama del nudo trébol. Pero el siguiente enlace es un poco más interesante.



## 1.5 Movimientos de Reidemeister

En esta sección describiremos como transformar un diagrama regular en otro, este concepto nos servirá para demostrar invariantes en el Capítulo 2.

Si tenemos dos diagramas regulares  $D_1$  y  $D_2$ , podemos verificar que son equivalentes usando los conceptos de *isotopía planar* y *movimientos de Reidemeister*, que definiremos a continuación:

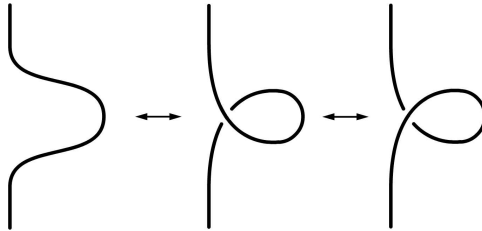
**Definición 1.11.** Una *isotopía planar* es un homeomorfismo del plano en sí mismo que preserva la orientación.

La idea de isotopía planar es que a un diagrama regular lo podemos deformar continuamente sin que la estructura del nudo cambie.

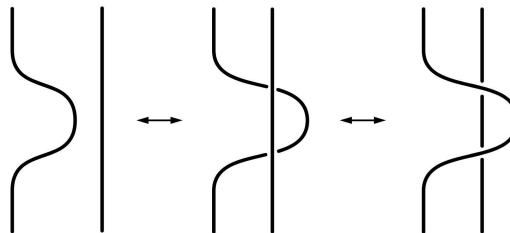


**Definición 1.12.** Los *movimientos de Reidemeister* son cambios en el diagrama regular de un nudo que no modifica la relación entre los cruces. Los movimientos se enuncian a continuación:

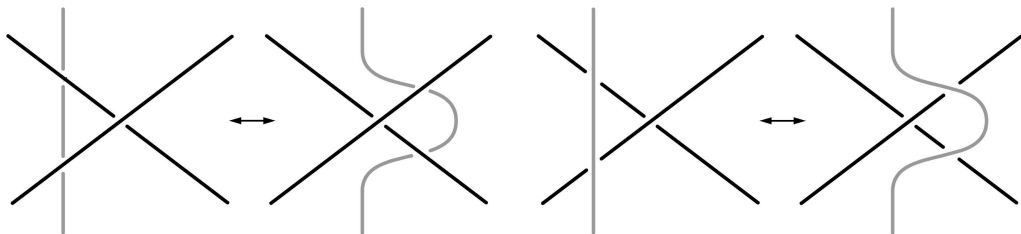
$\Omega_1$  Agregar o remover un rizo en el nudo.



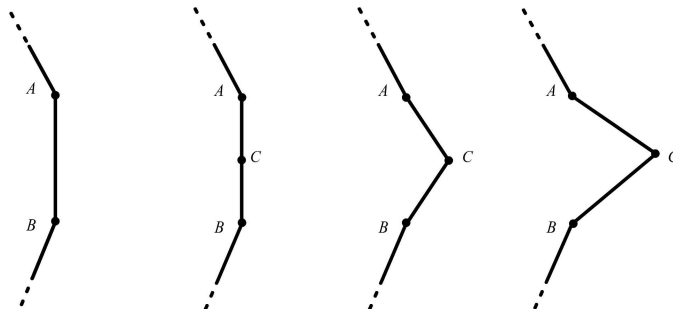
$\Omega_2$  Agregar o remover dos cruces consecutivos por arriba o por abajo.



$\Omega_3$  Movimiento de triángulo.



Veamos lo siguiente. Sean  $A$  y  $B$  los vértices de una arista de un nudo  $K$  en forma poligonal. Tomemos un punto  $C$  de la arista  $AB$  distinto de  $A$  o  $B$  y convirtámoslo en un nuevo vértice. Luego movamos al vértice  $C$  en el espacio de manera que la región acotada por el triángulo  $ABC$  sólo interseque a  $K$  en las aristas  $AC$  y  $CB$ . Un *rodeo triangular* es reemplazar la arista  $AB$  por las aristas  $AC$  y  $CB$  y un *corte triangular* es reemplazar las aristas  $AC$  y  $CB$  por  $AB$ . A las operaciones anteriores les llamaremos *movimientos triangulares*.



**Definición 1.13.** Sean  $L_0$  y  $L_1$  dos nudos poligonales. Si existe una secuencia finita de movimientos triangulares que transforman  $L_0$  en  $L_1$  decimos que  $L_0$  y  $L_1$  son *combinatoriamente equivalentes*.

Tenemos que los movimientos triangulares los podemos obtener de homeomorfismos que preservan la orientación. Por lo que si dos nudos poligonales son combinatoriamente equivalentes entonces son equivalentes (Definición 1.3). Lo opuesto también es cierto, sin embargo, no es sencillo de demostrar ([6] y [5, Sección 2.12]).

**Lema 1.14.** *Si dos enlaces poligonales son equivalentes entonces son combinatoriamente equivalentes.*

**Teorema 1.15.** *Dos diagramas regulares representan enlaces equivalentes si y sólo si se puede transformar el uno en el otro mediante un número finito de isotopías planares y movimientos de Reidemeister.*

*Demostración.* Daremos la prueba cuando los dos enlaces son poligonales.

$\Leftarrow$ ) Es claro que los movimientos de Reidemeister no cambian la estructura del enlace. Por lo que sólo resta la otra implicación.

$\Rightarrow$ ) Sean  $L_A, L_B$  dos enlaces poligonales equivalentes. Por el Lema 1.14 existe una secuencia finita de enlaces  $\{L_i \mid 0 \leq i \leq n, n \in \mathbb{R}\}$  que transforman a  $L_A = L_0$  en  $L_B = L_n$  por medio de movimientos triangulares. Podemos suponer por el Teorema 1.10 que cada diagrama  $D_i$  asociado a  $L_i$  es regular. Para obtener del diagrama  $D_i$  al  $D_{i+1}$  transformamos la arista  $ab$  en las aristas  $ac$  y  $cb$ . En lo siguiente analizaremos el triángulo formado por las aristas  $ab, ac$  y  $cb$  y obtendremos los movimientos de Reidemeister. Podemos suponer que las aristas que están en los extremos de  $ab$  no intersecan el interior del triángulo formado por el movimiento triangular, ya que de otra forma obtendríamos el movimiento de Reidemeister  $\Omega_1$  (ver Figura 1.6).

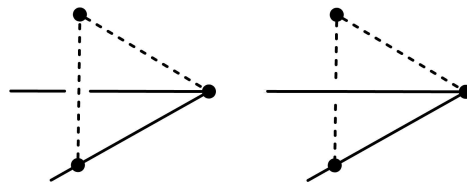
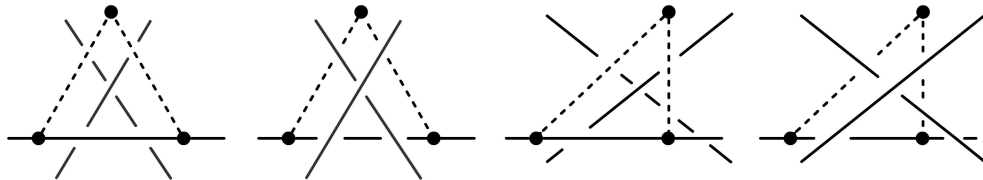


Figura 1.6: Movimiento de Reidemeister  $\Omega_1$ .

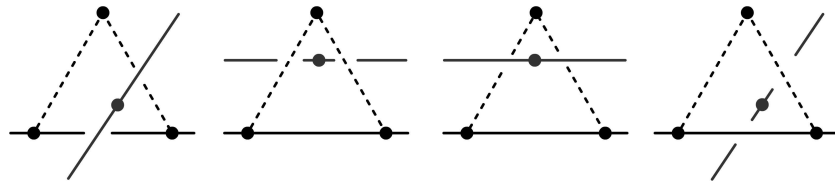
Descompondremos al triángulo  $abc$  en triángulos pequeños de manera que las aristas (de los triángulos pequeños) no intersequen vértices y cada triángulo corresponda

a uno de los siguientes tipos:

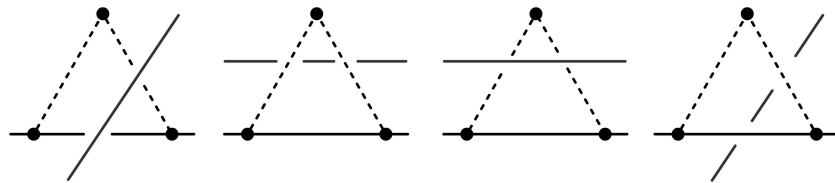
1. El triángulo contiene solamente un cruce.



2. El triángulo contiene solamente un vértice y sus correspondientes “partes” de aristas que salen del triángulo.



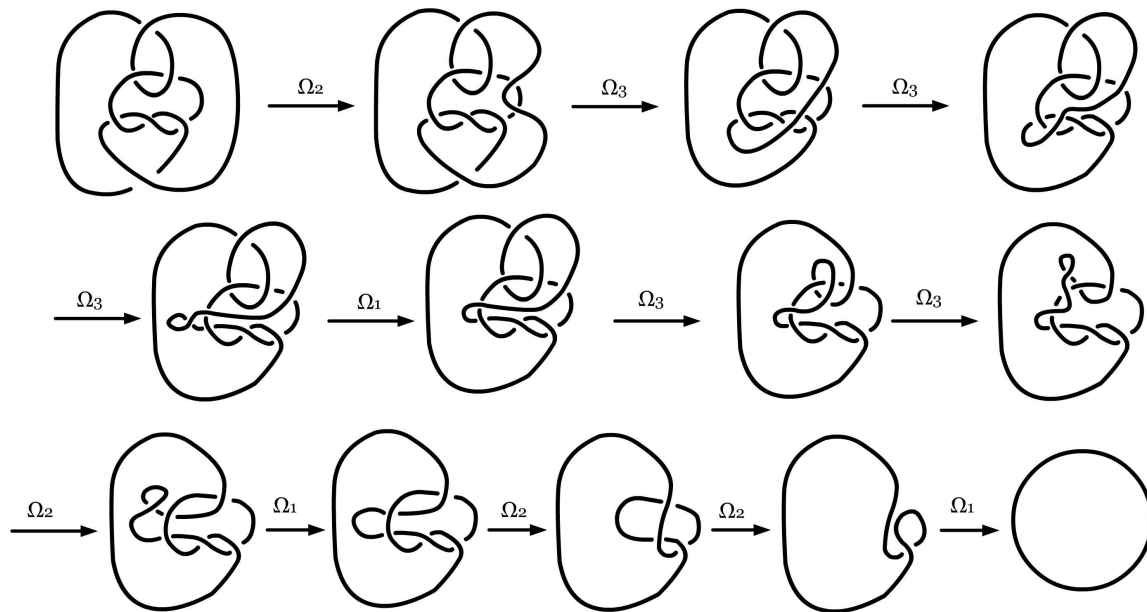
3. El triángulo contiene “partes” de aristas.



4. El triángulo no contiene vértices ni aristas.

Podemos obtener la descomposición debido a que el diagrama es regular. Lo que sigue es ver que cada triángulo pequeño es realizado por un movimiento de Reidemeister o una isotopía planar. En específico tenemos que el primer tipo de triángulo genera a  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ . Los triángulos del segundo y tercer tipo generan a  $\Omega_2$  e isotopías planares. ■

En la siguiente secuencia de diagramas regulares veremos como pasar del nudo desagradable al trivial, mediante movimientos de Reidemeister.



Los movimientos de Reidemeister se pueden usar para verificar que dos enlaces son equivalentes, pero si tomamos dos enlaces no equivalentes no nos sirven para afirmar que no lo son.



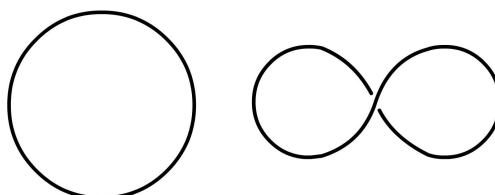
Uno de los problemas clásicos en la teoría de nudos es poder decidir si dos enlaces son equivalentes. En este capítulo veremos algunas propiedades que se conservan bajo enlaces equivalentes.

**Definición 2.1.** Un *invariante de enlace* es una función que va de un conjunto de enlaces y toma valores iguales sobre enlaces equivalentes.

### 2.1 Número de cruce

En esta sección conoceremos uno de los invariantes de enlace más comunes, con el que pondremos en práctica el concepto de diagrama alternante y además presentaremos un resultado con el que podremos distinguir algunos enlaces.

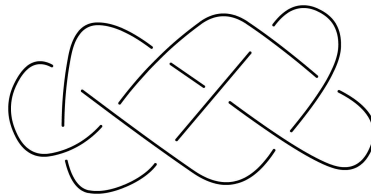
Sea  $D$  un diagrama regular de un enlace, denotemos por  $\mathbf{c}(D)$  al número de cruces del diagrama regular. Tenemos que  $\mathbf{c}(D)$  no es un invariante ya que el nudo trivial torcido tiene un cruce y el nudo trivial no tiene cruces.



**Definición 2.2.** El *número de cruce* de  $L$  es el número mínimo de cruces de los diagramas regulares de  $L$  y lo representaremos por  $\mathbf{c}(L)$ . Al diagrama regular de  $L$  que exhibe el número mínimo de cruces le llamamos *diagrama mínimo*.

El número de cruce es un invariante ya que si tenemos un enlace su diagrama regular puede ser llevado por movimientos de Reidemeister a su diagrama mínimo y si dos nudos son equivalentes ambos tendrán el mismo diagrama mínimo.

Sin embargo, calcular el número de cruce no siempre es fácil. Por ejemplo, el número de cruce del nudo de abajo es 0 ya que es equivalente al nudo trivial.



Un diagrama alternante se dice que es *reducido* si el número de cruces del diagrama no puede ser reducido al torcer una porción del diagrama.

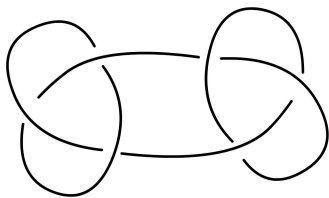


Diagrama Alternante Reducido

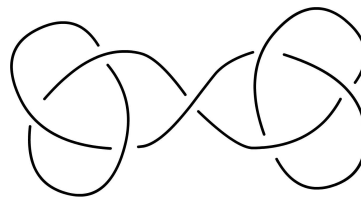


Diagrama Alternante No Reducido

L. Kauffman [9], K. Murasugi [13] y M. B. Thistlethwaite [18] probaron el siguiente resultado que nos ayuda a calcular el número de cruce para los nudos con diagrama alternante reducido.

**Teorema 2.3.** *El número de cruces de un diagrama alternante reducido es el número de cruce del enlace.*

Por lo que el número de cruces del nudo trébol es 3, de aquí se sigue que el nudo trivial y el trébol no son equivalentes.

## 2.2 Número de enlace

El siguiente invariante de enlace que presentaremos en esta sección nos describirá en cierta medida que tan enlazados están los nudos de un enlace y obtendremos un resultado interesante para un nuevo tipo de enlace.

Consideremos un nudo dirigido  $K$ , los puntos de cruce en un diagrama regular de  $K$  son de dos posibles formas: La Figura 2.1 (a) muestra un cruce positivo y la Figura 2.1 (b) un cruce negativo.

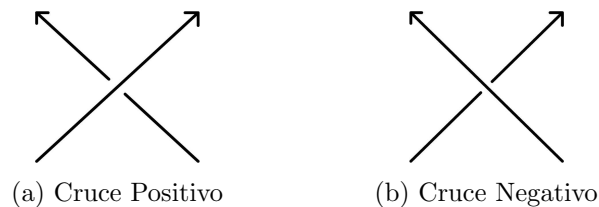


Figura 2.1: Tipos de Cruces

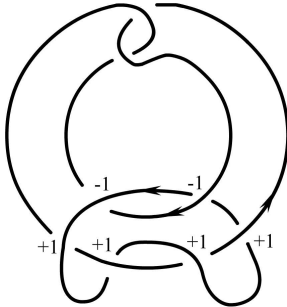
**Definición 2.4.** El *signo de un cruce* es igual a  $+1$  si el cruce es positivo y  $-1$  si el cruce es negativo.

Una manera de recordar esta definición es con ayuda de la regla de la mano derecha, que dice: tomemos con la mano derecha la cuerda que pasa por arriba del cruce de forma que el dedo pulgar apunte en dirección de la cuerda, entonces si los demás dedos apuntan en dirección de la cuerda de abajo del cruce, el cruce tiene signo positivo, de lo contrario tiene signo negativo.

De la Figura 2.1 podemos ver que si cambiamos la dirección del nudo el signo de los cruces no cambian, así tenemos que no importando la dirección del nudo trébol dextrógiro, la suma de sus signos de cruce es  $-3$ . Sin embargo esto no funciona para los enlaces.

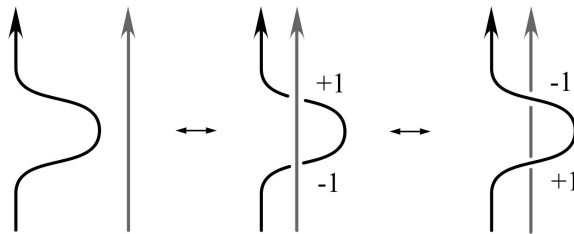
**Definición 2.5.** Dado un diagrama regular de un enlace dirigido con componentes  $K_1$  y  $K_2$ . Denotamos por  $K_1 \sqcap K_2$  al conjunto de los cruces entre  $K_1$  y  $K_2$ , omitiendo los cruces que pertenecen a un sólo componente. Entonces definimos el *número de enlace* como la suma de los signos de  $K_1 \sqcap K_2$  dividido por 2, denotándolo por  $\text{lk}(K_1, K_2)$ .

Calculemos el siguiente número de enlace:

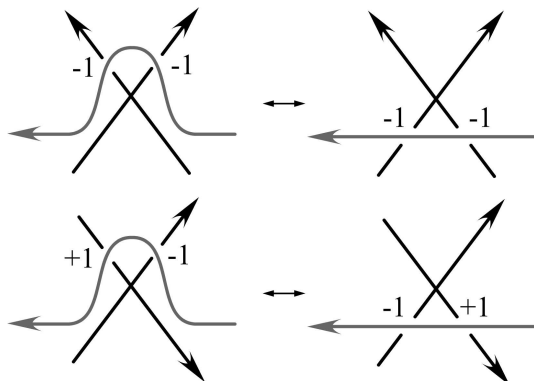


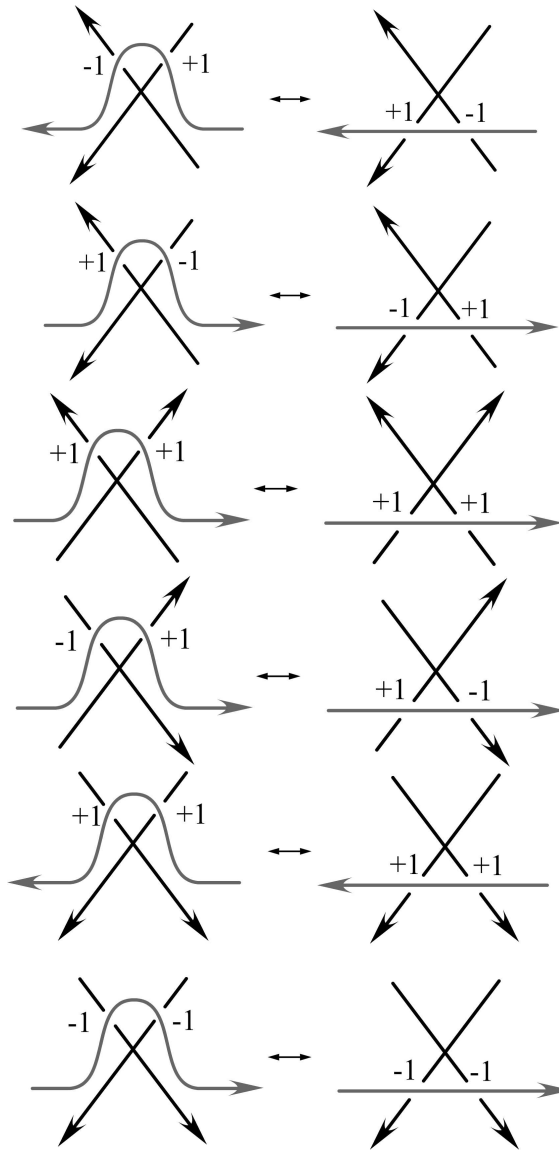
$$\text{lk}(K_1, K_2) = \frac{1}{2}(-2 + 4) = 1$$

El número de enlace es un invariante ya que no cambia al aplicar los movimientos de Reidemeister: Al aplicar  $\Omega_1$  el número de enlace no cambia debido a que el rizo pertenece sólo a un componente. Cuando aplicamos  $\Omega_2$  el número de enlace permanece igual, ya que si cada arco pertenece a distintas componentes la suma se anula.



Para  $\Omega_3$  el cruce del centro no se modifica por lo que no nos fijamos si en este cruce el nudo pasa por arriba o por abajo. Consideremos el caso en el que el arco que cambia pertenece a un componente y los demás arcos al otro. Además consideremos que el arco que cambia pasa por arriba, el caso en el que pasa por abajo es análogo.



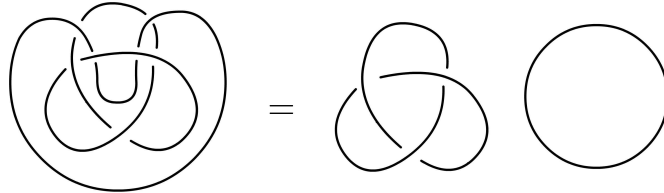


Para el caso en el que uno de los arcos que pasa por el cruce del centro pertenezca al mismo componente del que se mueve, se puede ver que no cambia el número de enlace.

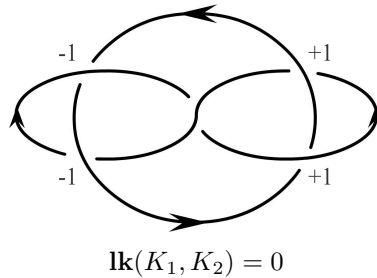
Podemos observar que al cambiar la dirección de uno de los nudos del enlace, el número de enlace es el mismo con signo contrario. Por lo que podemos definir al número de enlace para un enlace no dirigido como el valor absoluto del número de enlace para enlaces dirigidos.

Decimos que un enlace es *separable* si tiene un diagrama donde no se cruzan las componentes del enlace, en otras palabras  $K_1 \sqcap K_2 = \emptyset$ .

De la definición anterior se sigue que los enlaces separables tienen número de enlace igual a cero.



Sin embargo, el recíproco no es cierto ya que por ejemplo el enlace Whitehead tiene número de enlace igual a cero y no es separable, lo cual demostraremos en la siguiente sección.



## 2.3 Coloración

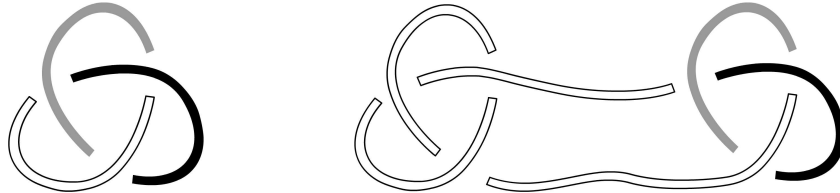
En esta sección mostraremos un invariante con el que podremos demostrar de una manera sencilla que el nudo trébol y el trivial no son el mismo y que el enlace Whitehead no es separable.

Dado un diagrama regular de un enlace, nos referiremos a un *arco* como una porción del diagrama regular que comienza y termina abajo de un cruce y solamente pasa por arriba de los cruces o que nunca pasa por debajo de un cruce (como el nudo trivial).

Por ejemplo, el diagrama del nudo trébol en la Figura 1.1 tiene 3 arcos y el diagrama del nudo 8 en la Figura 2.2 (en la próxima página) tiene 4 arcos.

**Definición 2.6.** Decimos que un diagrama regular de un nudo es *coloreable* si usando al menos dos de tres colores podemos colorear cada arco de manera que en cada cruce aparezcan los tres colores o un sólo color.

Veamos ejemplos de nudos coloreables.



Como ejemplos de nudos no coloreables podemos dar al nudo trivial y el nudo ocho.

El nudo trivial no es coloreable debido a que el diagrama regular en forma de círculo tiene un sólo arco y no tiene cruces, por lo que sólo podemos utilizar un sólo color para colorearlo.

En el nudo 8 de la Figura 2.2 podemos identificar los cuatro arcos:  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$ . Tratemos de colorear el cruce donde se intersecan los arcos  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Si suponemos que  $a$ ,  $b$  y  $c$  son de distinto color, entonces observando el cruce de  $a$ ,  $b$  y  $d$  concluimos que  $d$  debe tener el color de  $c$ , pero en el cruce  $a$ ,  $c$  y  $d$  se tienen dos colores, por lo que se viola la definición. Si suponemos ahora que los arcos  $a$ ,  $b$  y  $c$  tienen el mismo color también se viola la definición pues  $d$  debe tener el mismo color que los demás y entonces no se utilizan al menos dos colores.

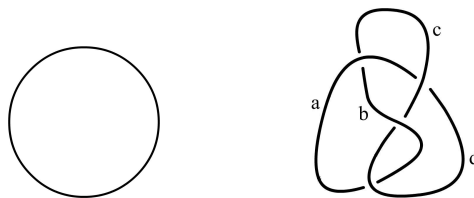
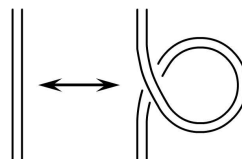


Figura 2.2: Los nudos trivial y 8 son no coloreables

*La colorabilidad es un invariante pues se conserva bajo movimientos de Reidemeister. Analicemos cada movimiento:*

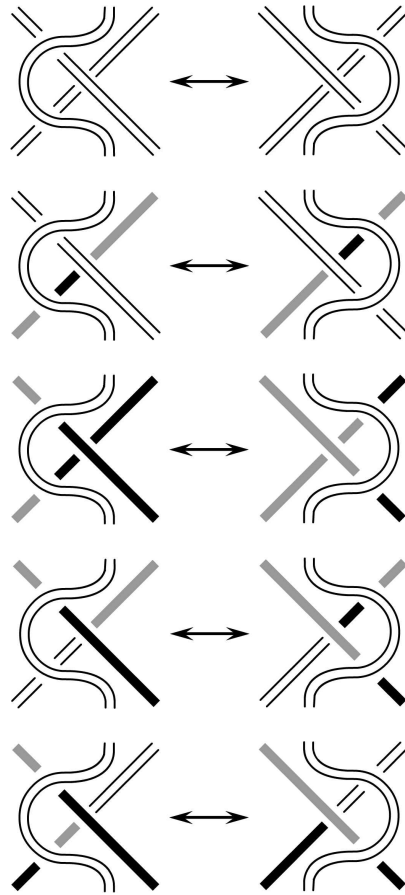
El movimiento  $\Omega_1$  conserva la colorabilidad pues al hacer el rizo sólo aumentamos un arco del mismo color.



El movimiento  $\Omega_2$  conserva la colorabilidad pues si los dos arcos son del mismo color se aumenta otro del mismo color y si los dos arcos son diferentes se aumenta un arco de diferente color.



Para analizar el movimiento  $\Omega_3$  mostramos los casos donde podemos observar que se conserva la colorabilidad.



Para definir la colorabilidad en diagramas regulares de enlaces tomaremos en cuenta sólo los cruces que pertenezcan a  $K_1 \sqcap K_2$  (ver definición 2.5). Entonces los enlaces separables de 2 componentes son coloreables pues cada componente se colorea de un color diferente.

Como ejemplo de enlace no separable podemos dar al enlace Whitehead. Podemos analizar la Figura 2.3 como en el caso del nudo 8.



Identifiquemos en el diagrama de la Figura 2.3 los arcos  $a, b, c, d$  y  $e$ . Supongamos que podemos colorear los arcos del cruce de los arcos  $a, b$  y  $e$  con tres colores. Debido a que  $b$  y  $e$  son distintos entonces el arco  $c$  debe ser coloreado del mismo color que el arco  $a$ , por lo tanto el arco  $d$  también debe tener el mismo color que  $a$ , pero el cruce de los arcos  $a, d$  y  $e$  está coloreado con sólo dos colores distintos, lo que contradice la definición. Ahora supongamos que podemos colorear los arcos  $a, b$  y  $e$  del mismo color, entonces el arco  $c$  debe ser coloreado del mismo color que  $a, b$  y  $e$ , se sigue que el arco  $d$  también debe ser coloreado con el color de  $a, b, c$  y  $e$ , por lo tanto nunca usamos al menos dos colores lo que contradice la definición.

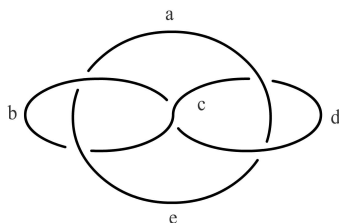


Figura 2.3: Whitehead es no coloreable

## 2.4 Polinomio de Jones

En esta sección introduciremos un invariante que a cada enlace le asocia un polinomio, con él podremos demostrar que los nudo trébol dextrógiro y levógiro son distintos.

Construiremos el polinomio de Jones a partir del polinomio corchete de Kauffman, por lo que comenzaremos revisando la definición de diagramas de madejas.

Nos referiremos a *diagramas de madejas* a diagramas regulares que coinciden fuera de una vecindad de un cruce y sólo difieren en esta vecindad, como en la Figura 2.4. De aquí en adelante, el símbolo  $\bigcirc$  representará al nudo trivial.



Figura 2.4: Diagramas de Madejas

**Definición 2.7.** El *polinomio corchete* de un diagrama regular  $D$  (denotado por  $\langle L \rangle$ ) es un polinomio definido en términos de la variable real  $a$  y  $a^{-1}$  que cumple con los siguientes axiomas:

1.  $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2.  $\langle L \cup \bigcirc \rangle = (-a^2 - a^{-2})\langle L \rangle$
3. Relación de madejas:  $\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = a \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle + a^{-1} \langle \rangle \langle \rangle$
4. Es invariante bajo isotopía planar.

Debido a que el polinomio corchete está definido sobre diagramas no orientados no hay forma de saber cuando el cruce es de la forma  $\times$  o  $\bowtie$ . Por lo que tenemos la relación de madejas:

$$\langle \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \rangle = a \langle \rangle \langle \rangle + a^{-1} \langle \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} \rangle \quad (2.1)$$

Podemos observar que si tenemos un enlace trivial de  $n$  componentes su correspondiente polinomio corchete será  $(-a^2 - a^{-2})^{n-1}$ .

Como ejemplo calculemos el polinomio corchete del nudo trébol levógiro.

$$\begin{aligned} \langle \text{trébol levógiro} \rangle &= a \langle \text{trébol levógiro} \rangle + a^{-1} \langle \text{trébol levógiro} \rangle \\ &= a^2 \langle \text{trébol levógiro} \rangle + \langle \text{trébol levógiro} \rangle + \langle \text{trébol levógiro} \rangle + a^{-2} \langle \text{trébol levógiro} \rangle \\ &= a^3 \langle \text{trébol levógiro} \rangle + a \langle \text{trébol levógiro} \rangle + a \langle \text{trébol levógiro} \rangle + a^{-1} \langle \text{trébol levógiro} \rangle \\ &\quad + a \langle \text{trébol levógiro} \rangle + a^{-1} \langle \text{trébol levógiro} \rangle + a^{-1} \langle \text{trébol levógiro} \rangle + a^{-3} \langle \text{trébol levógiro} \rangle \\ &= a^3(-a^2 - a^{-2}) + 3a + 3a^{-1}(-a^2 - a^{-2}) + a^{-3}(-a^2 - a^{-2})^2 \\ &= -a^5 - a^{-3} + a^{-7}. \end{aligned}$$

Ahora probaremos que el polinomio corchete está bien definido. Pero antes daremos unas definiciones para la prueba.

Dado un diagrama  $D$  con  $n$  cruces, definimos a un *estado*  $s$  de  $D$  como el diagrama al que a cada cruce le asignamos una de las dos posibles elecciones  $A : \times \rightarrow \bowtie$  ó  $B : \times \rightarrow \succ$ . Tenemos entonces que  $D$  tiene  $2^n$  estados. Dado un estado  $s$  denotaremos

por  $\alpha(s)$  al número de elecciones  $A$  menos el número de elecciones  $B$  y  $\beta(s)$  al número de componentes en este estado.

**Lema 2.8.** *Existe un único polinomio sobre el diagrama regular  $D$  que satisface la Definición 2.7.*

*Demostración.* Al aplicar la relación de madejas a cada cruce vamos eliminando los cruces hasta que al final nos quedan sólo enlaces triviales disjuntos, pues no hay cruces. En este momento el polinomio corchete de cada estado está multiplicado por  $a^{\alpha(s)}$ . Dado que cada estado es un enlace trivial de  $\beta(s)$  componentes, podemos substituir al polinomio corchete de cada estado por  $(-a^2 - a^{-2})^{\beta(s)-1}$ . Con lo que obtenemos la siguiente expresión:

$$\sum_s a^{\alpha(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\beta(s)-1}. \quad (2.2)$$

La cual es única pues no depende del orden en que aplicamos los axiomas de la Definición 2.7. ■

Notemos que debido a que la suma de la Ecuación 2.2 está en términos de los estados (los cuales son  $2^n$ ) no importa el orden en que aplicamos la relación de madejas y por lo tanto el polinomio está bien definido.

Para calcular  $\langle \bigcirc \bigcirc \rangle$  basta aplicar la relación de madejas y reducir

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle &= a \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + a^{-1} \langle \bigcirc \bigcirc \rangle \\ &= a + a^{-1}(-a^2 - a^{-2}) \\ &= -a^{-3}. \end{aligned}$$

Del ejemplo anterior nos podemos dar cuenta de que el polinomio corchete no es un invariante, debido a que  $\langle \bigcirc \rangle = 1$ . Sin embargo, es invariante bajo  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ , como veremos a continuación:

**Lema 2.9.** *El polinomio corchete es invariante bajo  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ .*

*Demostración.* Primero probemos que es invariante bajo  $\Omega_2$ :

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagram 1} \rangle &= a \langle \text{Diagram 2} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle \\
&= a^2 \langle \text{Diagram 4} \rangle + \langle \text{Diagram 5} \rangle + \langle \text{Diagram 6} \rangle + a^{-2} \langle \text{Diagram 7} \rangle \\
&= (a^2 + a^{-2}) \langle \text{Diagram 8} \rangle + (-a^2 - a^{-2}) \langle \text{Diagram 9} \rangle + \langle \text{Diagram 10} \rangle \\
&= \langle \text{Diagram 10} \rangle.
\end{aligned}$$

Ahora utilizando la invariancia bajo  $\Omega_2$  obtenemos la invariancia bajo  $\Omega_3$ :

$$\begin{aligned}
\langle \text{Diagram 11} \rangle &= a \langle \text{Diagram 12} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 13} \rangle = a \langle \text{Diagram 14} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 15} \rangle \\
&= a \langle \text{Diagram 16} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 17} \rangle = \langle \text{Diagram 18} \rangle.
\end{aligned}$$

Con lo que concluimos la prueba. ■

Analicemos lo que pasa con  $\Omega_1$ . Utilizando la relación de madejas calculemos el rizo izquierdo:

$$\langle \text{Diagram 19} \rangle = a \langle \text{Diagram 20} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 21} \rangle = a \langle \text{Diagram 22} \rangle + a^{-1}(-a^2 - a^{-2}) \langle \text{Diagram 22} \rangle = -a^{-3} \langle \text{Diagram 22} \rangle$$

Ahora el rizo derecho:

$$\langle \text{Diagram 23} \rangle = a \langle \text{Diagram 24} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 25} \rangle = a(-a^2 - a^{-2}) \langle \text{Diagram 26} \rangle + a^{-1} \langle \text{Diagram 26} \rangle = -a^3 \langle \text{Diagram 26} \rangle$$

Como podemos notar la invariancia falla para  $\Omega_1$ . Para corregirlo introduciremos la definición de retorcimiento.

El *retorcimiento*  $w(L)$  en un diagrama de un enlace dirigido es la suma de los signos del enlace (ver Definición 2.4).

Como podemos notar la definición de retorcimiento tiene semejanza con la definición de número de enlace. De hecho, la demostración de que el retorcimiento es invariante bajo  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  es similar a la del número de enlace.

**Lema 2.10.** *El retorcimiento es invariante bajo  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$ .*

Pero no se tiene invariancia bajo  $\Omega_1$ , como lo podemos notar. Sean  $D_-$ ,  $D_0$  y  $D_+$  los diagramas de madejas de un rizo negativo, un arco sin cruce y un rizo positivo respectivamente. Podemos notar que el retorcimiento varía para cada rizo.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} \text{Diagrama de rizo negativo} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagrama de arco sin cruce} \\ \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{Diagrama de rizo positivo} \\ \text{---} \end{array} \\
 w(D_-) = w(D_0) - 1 & w(D_0) & w(D_+) = w(D_0) + 1
 \end{array}$$

Utilizaremos que el retorcimiento no es invariante bajo  $\Omega_1$  para arreglar la invariancia del polinomio corchete. Definamos al polinomio  $X$  sobre diagramas dirigidos como  $X(L) = (-a)^{-3w(L)}\langle L \rangle$ , donde  $|L|$  representa al diagrama sin orientación.

**Teorema 2.11.** *El polinomio  $X$  es un invariante de nudos.*

*Demostración.* Debido a que el polinomio corchete y el retorcimiento son invariantes bajo  $\Omega_2$  y  $\Omega_3$  se tiene que el polinomio  $X$  también lo es. Ahora probemos que es invariante bajo  $\Omega_1$ . Sean  $D_-$ ,  $D_0$  y  $D_+$  los diagramas regulares que varían localmente donde  $D_-$  es un rizo negativo,  $D_0$  es un arco sin cruce y  $D_+$  es un rizo positivo. Tenemos

$$\begin{aligned}
 X(D_-) &= (-a)^{-3w(D_-)}\langle D_- \rangle = (-a)^{-3(w(D_0)-1)}((-a)^{-3}\langle D_0 \rangle) \\
 &= (-a)^{-3w(D_0)}\langle D_0 \rangle = X(D_0) \\
 X(D_0) &= (-a)^{-3w(D_0)}\langle D_0 \rangle = (-a)^{-3(w(D_+)-1)}((-a)^{-3}\langle D_+ \rangle) \\
 &= (-a)^{-3w(D_+)}\langle D_+ \rangle = X(D_+)
 \end{aligned}$$

Con lo que  $X$  es invariante bajo  $\Omega_1$ . ■

**Definición 2.12.** El *polinomio de Jones*  $V(L)$  del enlace dirigido  $L$  se obtiene al sustituir  $a$  por  $t^{-1/4}$  en el polinomio  $X(D)$  para cualquier diagrama  $D$  del enlace  $L$ .

Recordemos que para cualquier nudo el retorcimiento es el mismo no importando la dirección, por lo que el polinomio de Jones no nos sirve para determinar si un nudo es invertible.

Calculemos el polinomio de Jones del nudo trébol levógiro. El polinomio corchete del nudo trébol levógiro es  $-a^5 - a^{-3} + a^{-7}$ . Dando una dirección al nudo trébol

levógiro tenemos que el retorcimiento es 3. Por lo que

$$X \left( \bigcirc \right) = (-a)^{-9}(-a^5 - a^{-3} + a^{-7}) = a^{-4} + a^{-12} - a^{-16}.$$

Sustituyendo  $a$  por  $t^{-1/4}$  obtenemos

$$V \left( \bigcirc \right) = t + t^3 - t^4.$$

**Teorema 2.13.** Sean  $\otimes$ ,  $\otimes$  y  $\otimes$  diagramas de madejas. Entonces el polinomio de Jones satisface la relación de madejas

$$t^{-1}V \left( \otimes \right) - tV \left( \otimes \right) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V \left( \otimes \right) = 0 \quad (2.3)$$

*Demostración.* Multiplicando la relación de madejas del polinomio corchete por  $a^{-1}$  y la relación de madejas 2.1 por  $a$  tenemos

$$\begin{aligned} a^{-1} \langle \diagdown \diagup \rangle &= \langle \frown \rangle + a^{-2} \langle \rangle \langle \rangle \\ a \langle \diagdown \diagup \rangle &= a^2 \langle \rangle \langle \rangle + \langle \smile \rangle. \end{aligned}$$

Restándolas de manera que se elimine  $\smile$  obtenemos

$$a^{-1} \langle \diagdown \diagup \rangle - a \langle \diagdown \diagup \rangle = (a^{-2} - a^2) \langle \rangle \langle \rangle.$$

Utilizando el polinomio  $X(L) = (-a)^{-3w(L)} \langle |L| \rangle$  tenemos

$$a^{-1}(-a)^{3w(\otimes)} X \left( \otimes \right) - a(-a)^{3w(\otimes)} X \left( \otimes \right) = (a^{-2} - a^2)(-a)^{3w(\otimes)} X \left( \otimes \right).$$

Ocupando que  $w(\otimes) + 1 = w(\otimes) = w(\otimes) - 1$  se tiene,

$$-a^{-4} X \left( \otimes \right) + a^4 X \left( \otimes \right) = (a^{-2} - a^2) X \left( \otimes \right).$$

Sustituyendo  $a$  por  $t^{-1/4}$  nos queda

$$-tV \left( \otimes \right) + t^{-1}V \left( \otimes \right) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V \left( \otimes \right).$$

De donde concluimos la Ecuación 2.3. ■

Antes de pasar al último ejemplo haremos algunas observaciones del polinomio de Jones:

1.  $V(\bigcirc) = 1$ .
2. El polinomio de Jones de un enlace trivial de  $n$  componentes es

$$(-t^{-1/2} - t^{1/2})^{n-1}.$$

Calculemos el polinomio de Jones del nudo trébol dextrógiro. Observemos que

$$-tV\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bigcirc \end{array}\right) + t^{-1}V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \curvearrowright \end{array}\right) = (t^{1/2} - t^{-1/2})V\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} V\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bigcirc \end{array}\right) &= -t^{-1}(t^{1/2} - t^{-1/2}) + t^{-2}(-t^{1/2} - t^{-1/2}) \\ &= -t^{-1/2} + t^{-3/2} - t^{-3/2} - t^{-5/2} \\ &= -(t^{-1/2} + t^{-5/2}). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \curvearrowright \end{array}\right) &= t^{-2}V\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \bigcirc \end{array}\right) - t^{-1}(t^{1/2} - t^{-1/2})V\left(\begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array}\right) \\ &= t^{-2} + t^{-1}(t^{1/2} - t^{-1/2})(t^{-1/2} + t^{-5/2}) \\ &= t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}. \end{aligned}$$

En este momento ya podemos decir que el nudo trébol dextrógiro y el nudo trébol levógiro no son equivalentes, pues tienen polinomios de Jones diferentes. De hecho, podemos probar que el polinomio de Jones de la imagen espejo de un enlace es igual al polinomio de Jones del enlace reemplazando la variable por su recíproco.

**Teorema 2.14.** *Sean  $L$  un enlace y  $L'$  la imagen espejo del enlace. Entonces  $V(L')$  es obtenido al reemplazar  $t$  por  $t^{-1}$  en  $V(L)$ .*

*Demostración.* Probaremos el resultado para el polinomio  $X$ , pues si probamos la hipótesis para el polinomio  $X$  se sigue que es válida también para el polinomio de Jones.

En el Lema 2.8 obtuvimos que el polinomio corchete del diagrama del enlace  $L$  está dado por la Ecuación 2.2, por lo que el polinomio corchete de la imagen espejo es

$$\sum_s a^{-\alpha(s)}(-a^2 - a^{-2})^{\beta(s)-1},$$

ya que en la imagen espejo intercambiamos las elecciones  $A : \times \rightarrow \curvearrowright$  y  $B : \times \rightarrow \curvearrowleft$ . Entonces hasta este punto hemos demostrado que el polinomio corchete de  $L$  es

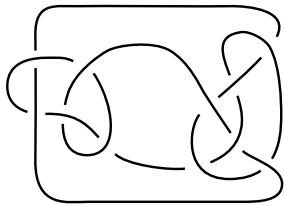
igual al polinomio corchete de la imagen espejo con la variable reemplazada con su recíproco. Además debido a que en la imagen espejo los cruces cambian pero la dirección del enlace  $L$  se mantiene tenemos que  $w(L) = -w(L')$ . Aplicando estos dos resultados a la definición del polinomio  $X$  obtenemos lo que esperábamos. ■

Se sigue del Teorema 2.14 que una condición necesaria (pero no suficiente) para que un enlace sea anfiqueiral es que el polinomio sea *palíndromo*, es decir que los coeficientes incluyendo los ceros sean los mismos hacia la izquierda o derecha.

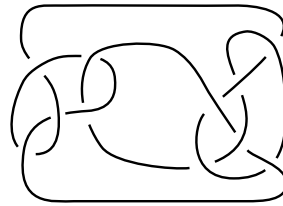
Existen nudos que tienen el mismo polinomio de Jones pero que no son equivalentes. Por ejemplo, los nudos Conway y Kiroshita-Terasaka tienen el mismo polinomio de Jones:

$$V(L) = t^6 - 2t^5 + 2t^4 - 2t^3 + t^2 + 2t^{-1} - 2t^{-2} + 2t^{-3} - t^{-4}$$

pero se sabe que no son equivalentes [12].



Nudo Conway



Nudo Kiroshita-Terasaka

De hecho un problema abierto sobre el polinomio de Jones es: ¿Existe un nudo no equivalente al trivial con polinomio de Jones igual a 1? Pues en caso de que no existiera tendríamos que cualquier nudo con polinomio de Jones igual a 1 es equivalente al nudo trivial.



## CAPÍTULO 3

---

### 4-Planos y Enredos Racionales

---

En este capítulo veremos las definiciones de enredo racional y 4-planos, algunas operaciones sobre enredos que nos permitirán formar ecuaciones las cuales nos ayudarán en el próximo capítulo a modelar cierto tipo de DNA muy sencillo.

A lo largo de éste y el siguiente capítulo tendremos la oportunidad de usar la herramienta *KnotJ3D*. En el Apéndice puede encontrar información de como usarlo.

### 3.1 Enredos Racionales

En esta sección definiremos a los enredos (dando énfasis en los enredos racionales), veremos algunas propiedades de los enredos racionales y por último definiremos las operaciones suma y cerradura.

Definamos a  $D^3 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1\}$ ,  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}$  y el *ecuador* de  $D^3$  como el círculo que se forma de la intersección de  $S^2$  y el plano XY.

Sobre  $S^2$  fijamos 4 puntos que llamaremos *NO*, *SO*, *SE*, *NE*.

**Definición 3.1.** Un *enredo* son 2 cuerdas disjuntas anudadas en  $D^3$  con extremos fijos *NO*, *SO*, *SE*, *NE*.

Al igual que los nudos, los enredos pueden ser representados por diagramas, que son proyectados sobre el plano  $XY$ .



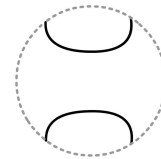
Si permitimos mover los extremos del enredo  $NO$ ,  $SO$ ,  $SE$ ,  $NE$  sobre  $S^2$ , pueden pasar tres cosas: podemos transformar al enredo original a un enredo trivial, podemos tener un enredo que tenga un nudo no trivial en al menos una de las cuerdas (conocido como enredo *localmente anudado*) o si no ocurre ninguna de las dos llegaremos a un *enredo primo* (ver Figura 3.1.a). Los enredos que pueden ser transformados en el enredos triviales los llamamos *enredos racionales*.



a) Enredo Primo



b) Enredo Localmente Anudado

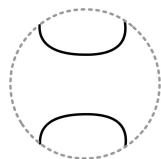
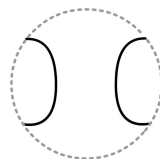
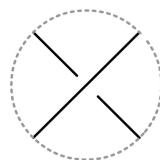


c) Enredo Trivial

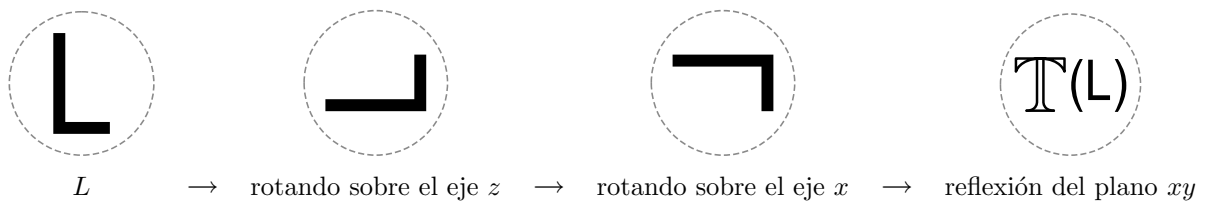
Figura 3.1: Tipos de Enredos

Nos enfocaremos a estudiar los enredos racionales pues son los que nos ayudarán a describir el modelo del DNA.

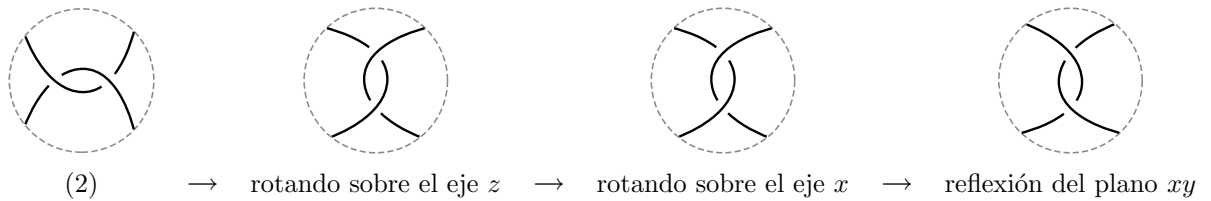
Los primeros ejemplos son los enredos  $(0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(1)$ ,  $(-1)$ .

 $(0)$  $(0, 0)$  $(1)$  $(-1)$

Sea  $L$  un enredo cualquiera, podemos obtener un enredo rotando con respecto al eje  $z$ , luego rotando con respecto al eje  $x$  y por último tomamos la reflexión con respecto al plano  $xy$ . A esta transformación la denotaremos por  $\mathbb{T}$ .



Veamos un ejemplo con el enredo (2).



Dados dos enredos  $A$  y  $B$  podemos definir la operación producto (Figura 3.2). La operación producto la denotaremos por una coma. Además la operación producto únicamente será asociativa por la izquierda en enredos racionales, es decir, si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son enredos el producto es  $(A, B), C$ . El enredo resultante de la operación producto es un enredo racional [4]. Tomando en cuenta la asociatividad no haremos uso de los paréntesis.

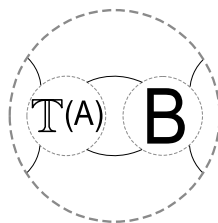
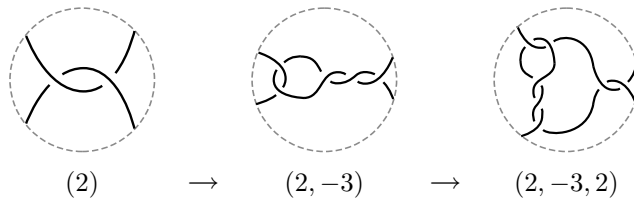
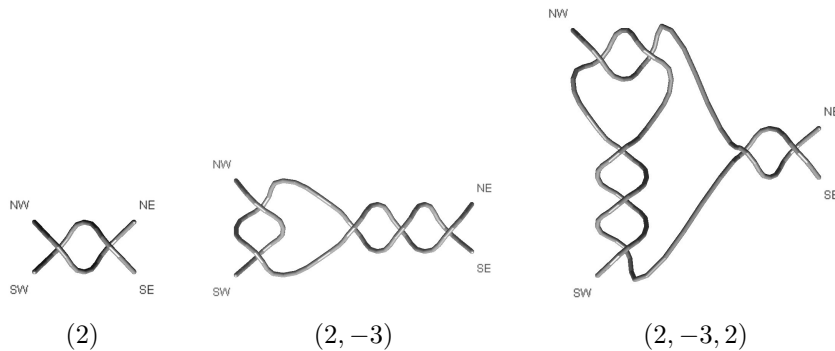


Figura 3.2: Producto de enredos

Con esta operación podemos obtener vectores que expresan enredos racionales. Por ejemplo, podemos obtener el enredo de  $(2, -3, 2)$  (Figura 3.3).

Figura 3.3: Enredo  $(2, -3, 2)$ 

Gráficar los enredos a partir de un vector dado no es sencillo. Sin embargo, con ayuda de *KnotJ3D* podemos gráficar los vectores de manera muy sencilla.



Cualquier vector  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  que representa a un enredo  $T$  tiene asociado un número racional  $\frac{\beta}{\alpha}$  que se define como

$$\frac{\beta}{\alpha} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_{n-2} + \dots + \frac{1}{a_1}}}.$$

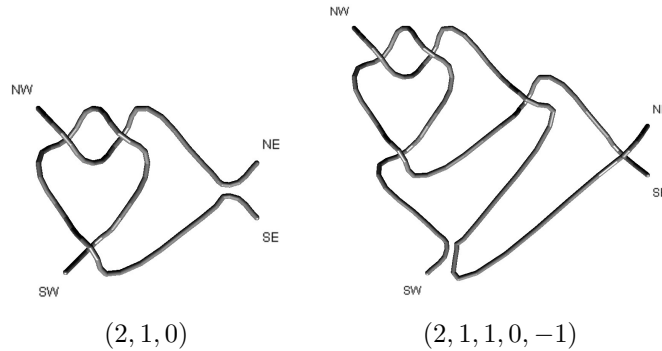
El número racional  $\frac{\beta}{\alpha}$  es llamado la *fracción* de un enredo  $T$ .

La definición de equivalencia es análoga a la que obtuvimos para enlaces. Decimos que dos diagramas de enredos  $T_1$  y  $T_2$  generan enredos *equivalentes* si y sólo si es posible transformar a  $T_1$  en  $T_2$  mediante un número finito de movimientos de Reidemeister e isotopías planares.

Además se tiene el siguiente resultado.

**Teorema 3.2** (Conway, 1970). *Dos enredos racionales son equivalentes si y sólo si tienen la misma fracción.*

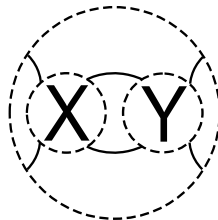
Por ejemplo, los vectores  $(2, 1, 0)$  y  $(2, 1, 1, 0, -1)$  tienen la fracción  $\frac{2}{3}$ , del teorema anterior podemos concluir que son equivalentes. Para comprobar que son equivalentes podemos graficarlos.



Por otro lado, todo enredo racional tiene un vector canónico llamado el *símbolo de Conway*. Un vector  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  es símbolo de Conway si  $|a_1| > 1$ ,  $a_i \neq 0$  para  $1 \leq i < n - 1$  y las entradas distintas de cero tienen el mismo signo. El símbolo de Conway representa un diagrama mínimo alternante. Las excepciones del símbolo de Conway son los enredos  $(0)$ ,  $(-1)$ ,  $(1)$ ,  $(0, 0)$ .

Ahora veremos dos operaciones que nos servirán para formar ecuaciones con enredos.

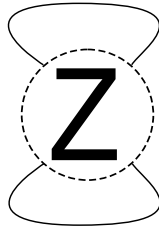
**Definición 3.3.** Dado dos enredos  $X$  y  $Y$ , la *suma de enredos*  $X+Y$  estará definida como:



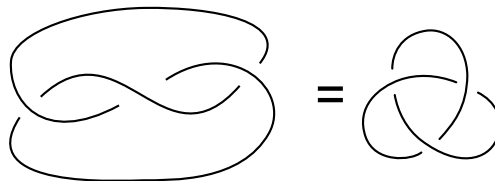
Sea  $T$  un enredo cualquiera. Si el extremo  $NO$  termina en el  $NE$  se dice que  $T$  tiene paridad  $(0)$ , si termina en el  $SE$  tiene paridad  $(1)$  y si termina en el  $SO$  tiene paridad  $(0, 0)$ .

La suma de enredos no siempre es un enredo, por ejemplo de la suma de  $(0, 0)$  y  $(0, 0)$  resulta un enredo con un nudo. De hecho si sumamos dos enredos de paridad  $(0, 0)$  obtendremos un nudo ajeno a las dos cuerdas. Además si la suma de enredos racionales es un enredo, no es necesario que sea racional, por ejemplo si sumamos los enredos racionales  $(-3, 0)$  y  $(2, 0)$  obtenemos al enredo primo mostrado en la Figura 3.1.

**Definición 3.4.** Sea  $Z$  un enredo, la *cerradura del enredo*  $\mathbf{N}(Z)$  está definida por:



Ahora podemos formar ecuaciones con enredos. La cerradura de la suma de dos enredos resulta en un nudo o un enlace. Por ejemplo  $\mathbf{N}((2)+(1))$  es igual al Nudo Trébol. Hablaremos con más detalle sobre ecuaciones de enredos más adelante.



## 3.2 4-Planos

Como vimos la suma de dos enredos racionales no es necesariamente un enredo racional. Sin embargo, la cerradura de la suma de dos enredos racionales es un enlace llamado 4-plano.

La cerradura de enredos racionales es un *enlace racional*. Así tenemos que el nudo trébol es un enlace racional. A algunos enlaces los podemos poner en un plano excepto por a lo más 2 cuerdas llamadas puentes. Estos enlaces son llamados *2-puente*.

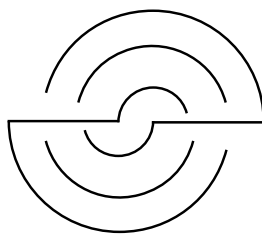


Figura 3.4: Presentación 2-puente del nudo trébol

**Definición 3.5.** Un enlace es  $4$ -Plano si puede ser representado por un diagrama que consta de cuatro cuerdas de las cuales sólo las tres primeras pueden ser trenzadas y la última debe quedar libre.

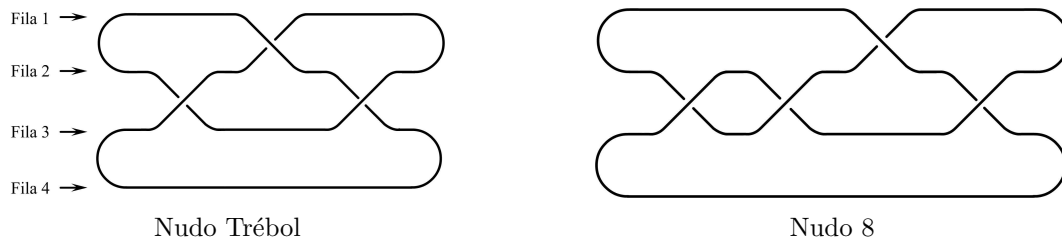


Figura 3.5:  $4$  - Planos

Es sabido que los 4-planos, 2-puente y los enlaces racionales son la misma familia de nudos y enlaces. Los nudos primos de 7 o menos cruces y los enlaces primos de 2 componentes de 6 o menos cruces son 4-planos [16].

Podemos asignar un vector al diagrama, para ello enumeremos las cuerdas de arriba hacia abajo del 1 al 4. Comenzando del lado izquierdo del diagrama, colocamos el número de cruces que se forman entre las filas 2 y 3 (sin que haya algún cruce de la fila 1 y 2) en la primera entrada, después el número de cruces que se formen entre las filas 1 y 2 (sin que contengan algún cruce de las filas 2 y 3) lo colocamos en la segunda entrada y continuamos de manera alternada hasta terminar.

Tenemos por ejemplo los siguientes vectores  $\langle 1, 1, 1 \rangle$  y  $\langle 2, 1, 1 \rangle$  que corresponden al nudo trébol y al nudo 8 respectivamente (ver Figura 3.5). Si el vector  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$  es de longitud impar y  $a_i \geq 0$  para todo  $i$ , el vector es llamado el *símbolo de Conway* del 4-plano. El diagrama correspondiente a un símbolo de Conway es alternante reducido por lo tanto mínimo, este diagrama lleva el nombre de *diagrama canónico*.

Por convención el vector  $\langle 1 \rangle$  representará al nudo trivial y el vector  $\langle 0 \rangle$  representa al enlace trivial de 2 componentes. Si al diagrama lo volteamos nos resultará un vector con las entradas invertidas, pero como es de suponer este representa al mismo nudo.

Al igual que con los enredos, dado un vector  $\langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle$ , le podemos asociar el número racional

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{c_1 + \frac{1}{c_2 + \dots + \frac{1}{c_n}}}.$$

Denotaremos entonces al enlace como  $\mathbf{b}(\alpha, \beta)$ .

### 3.3 Ecuaciones de enredos

Como hemos venido diciendo, podemos generar ecuaciones de la forma  $\mathbf{N}(A+B) = L$ , donde  $A$  y  $B$  son enredos y  $L$  es un enlace de una o dos componentes. Sin embargo, podríamos encontrar situaciones en las que uno o ambos enredos son desconocidos y el enlace resultante es conocido o que los enredos son conocidos y el enlace es desconocido. En esta sección veremos algunos teoremas que nos ayudarán a resolver estas ecuaciones en ciertos casos.

Introduciremos el concepto de matriz representativa que es otra manera de representar a un enredo. Después veremos un lema en el que se sabe que los dos enredos son racionales.

Dado un vector de longitud par que representa el enredo  $\frac{\beta}{\alpha}$ , definimos la *matriz representativa* como

$$\begin{bmatrix} u & v' \\ v & u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_{2k} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{2k-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a_{2k-2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_{2k-3} & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por ejemplo si  $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{7}{4}$  con el vector  $(9, 0, -7, 0, -6, 2)$  tenemos que la matriz es

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Lema 3.6.** *Dados dos enredos racionales  $A_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$  y  $A_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ , entonces  $\mathbf{N}(A_1+A_2) = L$  es un 4-plano que es igual a  $\mathbf{b}(\alpha, \beta)$ , donde  $\alpha = |\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1|$  y  $\beta$  está determinado como sigue:*

1. si  $\alpha = 0$  entonces  $\beta = 1$ ;
2. si  $\alpha = 1$  entonces  $\beta = 1$ ;
3. si  $\alpha > 1$ , entonces  $\beta$  es determinado únicamente por lo siguiente:  $0 < \beta < \alpha$  y  $\beta \equiv \sigma(\alpha_1 v' + \beta_1 u') \pmod{\alpha}$ , donde  $\sigma = \text{signo}(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)$  y  $v'$  y  $u'$  son las entradas en la segunda columna de alguna matriz representativa para el enredo  $\frac{\beta_2}{\alpha_2}$ .

La prueba de este teorema puede ser encontrada en [7, Lema 2.1].



Sean  $A_1 = 3$  y  $A_2 = \frac{7}{4}$ . Usando el vector  $(1, 2, 1, 1)$  que representa a  $A_2$  tenemos la siguiente matriz representativa

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

entonces tenemos  $\alpha = |1 \cdot 7 + 4 \cdot 3| = 19$  y  $\beta = (1 \cdot 5 + 3 \cdot 3) \bmod 19 = 14$ , por lo que  $\mathbf{b}(19, 14)$ .

Supongamos ahora que en nuestra ecuación  $\mathbf{N}(X+A) = K$ ,  $A$  es racional,  $K$  es un 4-plano y deseamos conocer como debe ser  $X$ . La respuesta es que ahora  $X$  no está obligado a ser un enredo racional. Por ejemplo, si  $(n)$  denota el enredo con  $n$  cruces positivos horizontales y queremos resolver la ecuación  $\mathbf{N}(X+(n)) = \langle 1 \rangle$ , la solución contiene a una colección infinita de enredos primos, tal como el de la Figura 3.6.

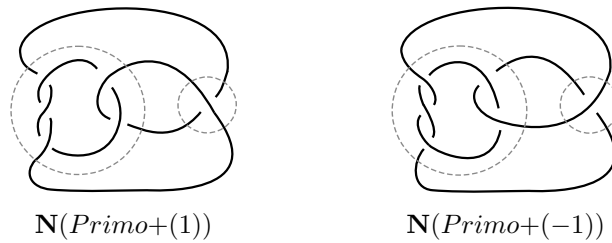


Figura 3.6: Nudo Trivial  $\langle 1 \rangle$

Nos enfocaremos a soluciones que dan enredos racionales. Para soluciones racionales tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 3.7.** *Sea  $A = \beta/\alpha = (a_1, \dots, a_{2n})$  un enredo racional y*

$$K = \langle c_1, \dots, c_{2k+1} \rangle \neq \langle 0 \rangle$$

*un 4-plano. Los enredos racionales que son solución a la ecuación  $\mathbf{N}(X+A) = K$  son las siguientes:*

$$X = (c_1, \dots, c_{2k+1}, r, -a_1, \dots, -a_{2n})$$

*ó*

$$X = (c_{2k+1}, \dots, c_1, r, -a_1, \dots, -a_{2n}),$$

*con  $r$  cualquier entero. Si  $K = \langle 0 \rangle$ , entonces  $X = (-a_1, \dots, -a_{2n})$  es la única solución.*

La demostración del teorema puede ser encontrada en [7, Teorema 2.2].

Para la solución de una ecuación con una incógnita obtuvimos una infinidad de soluciones. Sin embargo, el siguiente teorema nos dice que si tenemos dos ecuaciones con una incógnita tenemos a lo más dos soluciones.

**Teorema 3.8.** Sean  $A_1 \neq A_2$  enredos racionales y  $K_1$  y  $K_2$  4-planos. Entonces hay a lo más dos enredos racionales que son solución a las ecuaciones  $\mathbf{N}(X+A_1) = K_1$  y  $\mathbf{N}(X+A_2) = K_2$ .

*Demostración.* Sean  $X = \frac{u}{v}$ ,  $A_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$ ,  $A_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$ ,  $K_1 = \mathbf{b}(\alpha, \beta)$  y  $K_2 = \mathbf{b}(\alpha', \beta')$ . Entonces por el Lema 3.6 tenemos que  $\alpha = |u\alpha_1 + v\beta_1|$  y  $\alpha' = |u\alpha_2 + v\beta_2|$ . En el plano  $uv$  estas ecuaciones describen dos pares de líneas rectas paralelas. Estas se intersecan en a lo más 4 puntos. Debido a que  $\frac{u}{v} = \frac{-u}{-v}$ , estos cuatro puntos describen a lo más 2 distintos enredos racionales que son solución para las ecuaciones de la hipótesis. ■

Veamos un ejemplo de este último teorema. Sean  $A_1 = \frac{1}{3}$ ,  $A_2 = \frac{5}{17}$ ,  $K_1 = \mathbf{b}(5, 4)$  y  $K_2 = \mathbf{b}(29, 17)$ . Entonces tenemos

$$|v + 3u| = 5,$$

y

$$|5v + 17u| = 29.$$

Basta resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcl} v + 3u = 5 & & v + 3u = -5 \\ 5v + 17u = 29 & & 5v + 17u = 29 \end{array}$$

resolviendo el primer sistema obtenemos que  $v = -1$  y  $u = 2$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 17 & 29 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right],$$

resolviendo el segundo obtenemos que  $v = -86$  y  $u = 27$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -5 \\ 5 & 17 & 29 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 54 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -86 \\ 0 & 1 & 27 \end{array} \right].$$

Con lo que obtenemos que las soluciones son  $X = -2$  y  $X = -\frac{27}{86}$ .

# CAPÍTULO 4

---

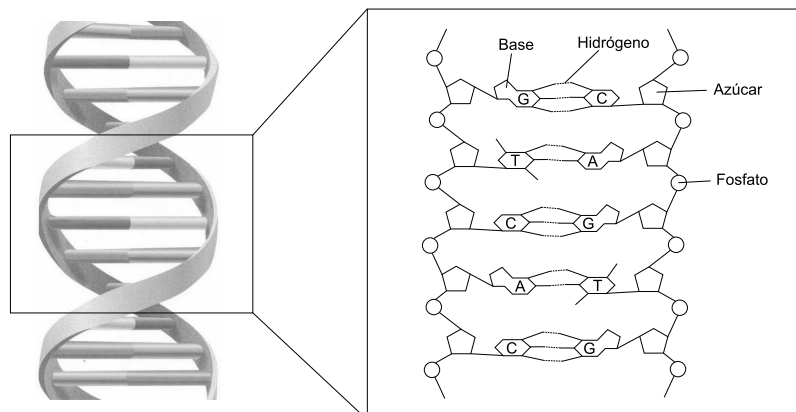
## Aplicación al DNA

---

En este capítulo utilizaremos los conceptos desarrollados en el capítulo tres (enredos y 4-planos) para explicar el proceso del DNA llamado recombinación.

### 4.1 Conceptos generales del DNA

El *DNA* o *ácido desoxirribonucleico* es una molécula de dos cadenas compuestas de azúcar y fosfato enrollados entre sí en forma de doble hélice. A cada azúcar le corresponde una de las cuatro bases (*nucleótidos*): adenina (A), citosina (C), guanina (G) y timina (T), de ahora en adelante nos referiremos a ellas como A, C, G, T respectivamente.

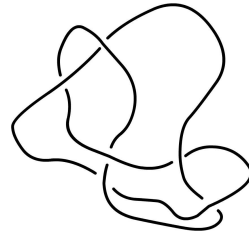
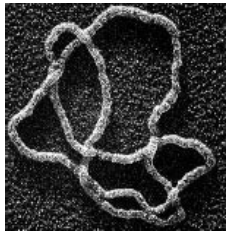


Un enlace de hidrógeno une dos cadenas opuestas donde sólo se pueden unir:

1. La adenina y la timina
2. La citosina y la guanina

La palabra formada en una de las cadenas se llama la *secuencia genética*. El DNA se tuerce hacia la derecha lo cual hace que la molécula tenga forma de hélice, que sirve de protección y almacenamiento de la información [16, Sección 5].

Esquemáticamente el DNA, en sus formas más simples, puede tener forma lineal o circular [2, Sección 1.2]. Analizaremos sólo el DNA circular ya que es el que tiene las propiedades topológicas de los nudos que hemos venido estudiando. La molécula del DNA está albergada en el núcleo de la célula y puede tener hasta un millón de veces el tamaño del núcleo, por lo que el DNA se anuda para que el empaquetamiento sea óptimo [17]. Este anudamiento puede interferir en los procesos vitales del DNA tales como: replicación, transcripción y recombinación.



Nudo 8

## 4.2 Recombinación específica de sitio

La *recombinación específica de sitio* es un proceso que mueve un bloque de DNA a otro lugar de la molécula o agrega un bloque de DNA viral en el genoma huésped [16]. Uno de los propósitos de la recombinación es la regulación de la expresión del gen. Además, los virus aprovechan la recombinación para insertar DNA viral dentro del DNA del organismo huésped [20]. Cabe mencionar que la recombinación viral se excluye de nuestro modelo pues se lleva a cabo en moléculas lineales de DNA. El *lugar de recombinación* es un par de lugares de DNA (no necesariamente de la misma molécula) que están yuxtapuestos en presencia de la *recombinasa* (la enzima que interviene en el lugar de recombinación). Ambos lugares son alineados por medio de manipulaciones hechas por la enzima y después son envueltos por ella, a este proceso se le conoce como *sinapsis*. La enzima junto con la parte del DNA que está rodeado por la enzima llevan el nombre de *sinaptosoma* (la parte oscura que cubre al DNA

de la Figura 4.1) y al DNA junto con la enzima que están involucrados en la sinapsis los llamamos *complejo sináptico*.

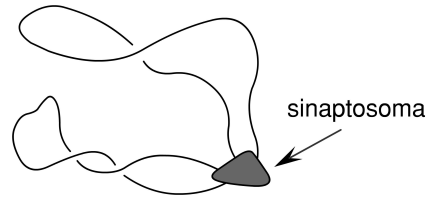


Figura 4.1: Complejo sináptico

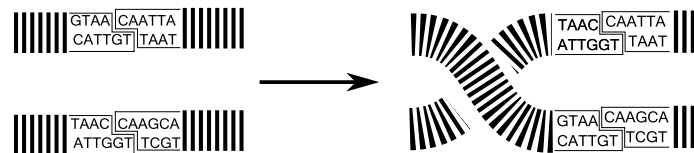
Después de que la enzima cubre este lugar, rompe la doble hélice de ambos lugares y combina los extremos. El DNA antes de la recombinación lleva el nombre de *substrato* y después de la recombinación se llama *producto*. Nuestro objetivo es deducir el mecanismo de la recombinasa antes y después de la recombinación, a esto se le ha llamado el *acercamiento topológico a la enzimología*.

Debido a que la secuencia genética no es palindrómica, en cada lugar de recombinación podemos elegir una orientación según leemos la “secuencia de las letras” formadas por el corte. Por ejemplo en la Figura 4.2 podemos elegir leer la “secuencia de letras” en la dirección *CA* o podemos elegir leerla *AC*.



Figura 4.2: Orientación local del DNA

En el sinaptosoma, los extremos cortados se unen de manera que la nueva secuencia no viole la regla en que las bases se pueden unir, lo cual se simplifica usando las orientaciones.



Si las orientaciones coinciden entonces decimos que la configuración del lugar corresponde a *repeticiones directas*. En caso contrario, si las orientaciones no coinciden, la configuración del lugar corresponde a *repeticiones invertidas*. Si tenemos un substrato con repeticiones directas obtendremos como producto dos nudos de DNA

y si el sustrato tiene repeticiones invertidas obtendremos un sólo nudo de DNA (Figura 4.3).

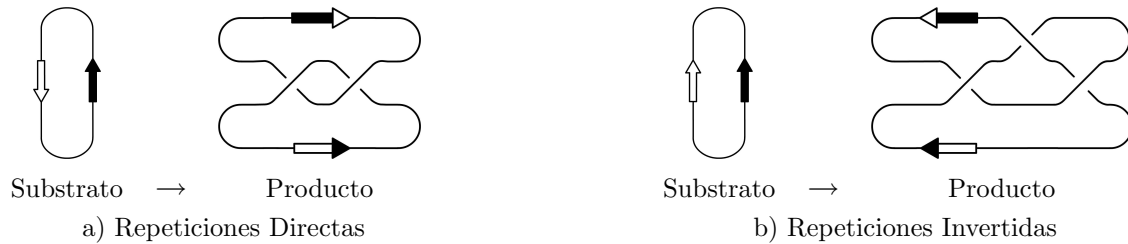


Figura 4.3: Repeticiones

Quizá más de un evento de recombinación ocurra en un lugar de recombinación, cuando suceda diremos que es una *recombinación procesiva*. Si ocurren más de un evento de recombinación en diferentes encuentros de la enzima con el DNA, decimos que es una *recombinación distributiva*.

### 4.3 Modelación con enredos

Las observaciones en el laboratorio mostraron que el par de lugares unidos a la enzima forman un enredo y el producto de la recombinación ha sido un 4-plano [16]. El objetivo del modelo es poder calcular la topología del complejo sináptico antes y después de la recombinación. Como hemos visto la cerradura de la suma de enredos racionales es un 4-plano, por lo que podemos ver al complejo sináptico como una ecuación de enredos. Lo que sigue es hacer algunas suposiciones sobre el comportamiento del DNA y de nuestro modelo [16].

(S1) El mecanismo de la recombinación es constante, independiente de la geometría y topología del sustrato. El proceso de recombinación se produce enteramente en el dominio de la enzima y lo que está fuera de el dominio permanece fijo.

Es decir, asumiremos que dos copias del sinaptosoma antes de la recombinación (pre-recombinación) son equivalentes y de igual manera dos copias del sinaptosoma después de la recombinación (post-recombinación) son equivalentes.

En el evento de recombinación, podemos distinguir tres lugares (ver Figura 4.4):

1. El lugar del DNA unido a la enzima donde se lleva acabo el rompimiento y reunión del DNA. Nombrado el *enredo paternal* y denotado por  $P$ .

2. El lugar donde el DNA está rodeado por la enzima y no cambia el DNA. Llamado el *enredo externo rodeado* y denotado por  $O_b$ .
3. El lugar del DNA que no está rodeado por la enzima. Nombrado el *enredo externo libre*, denotado por  $O_f$ .

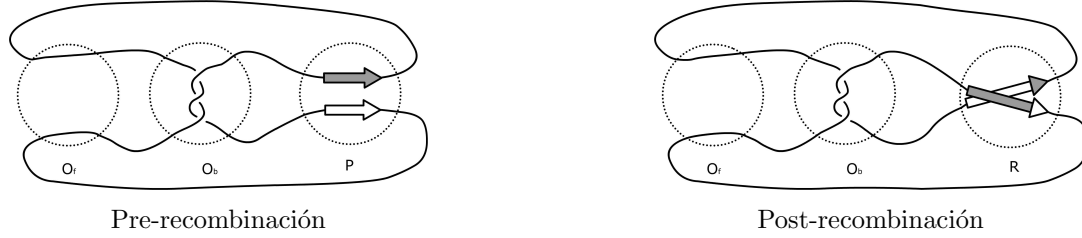


Figura 4.4: Evento de Recombinación

Por lo que hacemos la siguiente suposición.

- (S2) El sinaptosoma es un enredo de dos cuerdas que puede ser dividido en la suma de los enredos  $O_b$  y  $P$  ( $O_b + P$ ).

El *mecanismo de la enzima* es modelada como el reemplazo del enredo paternal por el *enredo recombinante*  $R$ , este proceso es conocido como *cirugía de enredos*. Entonces nuestro modelo asume que el sinaptosoma antes de la recombinación es igual a la suma de los enredos  $O_b + P$  y que el enredo después de la recombinación es igual a la suma de los enredos  $O_b + R$ .

- (S3) El lugar de recombinación actúa por una cirugía de enredos, donde el enredo  $P$  es reemplazado por el enredo  $R$ . Además el complejo sináptico se obtiene de la cerradura de la suma de los enredos  $O_f$  y *sinaptosoma*.

Esto significa que en un evento de recombinación tenemos las siguientes ecuaciones en términos de las variables  $\{O_f, O_b, P, R\}$ , la ecuación del substrato está dada por

$$\mathbf{N}(O_f + O_b + P) = \text{Substrato}$$

y la ecuación del producto está dada por

$$\mathbf{N}(O_f + O_b + R) = \text{Producto.}$$

Por ejemplo, si tuviéramos que  $O_f = (0)$ ,  $O_b = (-3, 0)$ ,  $P = (0)$  y  $R = (1)$ , entonces obtendríamos las siguientes ecuaciones: la ecuación del substrato está dada por

$$\mathbf{N}((0) + (-3, 0) + (0)) = \langle 1 \rangle$$

y la ecuación del producto está dada por

$$\mathbf{N}((0) + (-3, 0) + (1)) = \langle 2 \rangle.$$

La última suposición tiene que ver con múltiples rondas de recombinación procesiva.

**(S4)** En una recombinación procesiva, cada ronda adicional de recombinación suma una copia del enredo recombinante  $R$  al sinaptosoma.

En otras palabras, para una recombinación procesiva de  $n$  rondas tenemos que la ecuación que describe la recombinación está dada por  $N(O_f + O_b + rR) = K_r$ , donde

$$rR = \underbrace{R + R + \cdots + R}_{r \text{ veces}} \text{ y } K_r \text{ es el producto en la } r\text{-ésima ronda con } 1 \leq r \leq n.$$

Lo que sigue es la aplicación del modelo.

## 4.4 Resolvasa Tn3

La Resolvasa Tn3 es una recombinasa de un lugar específico que reacciona en ciertos DNA circulares con sitios de recombinación repetidos directamente. La mayoría de las veces cuando se trata al DNA con la resolvasa sólo interviene en una ronda de recombinación y al final libera un producto enlazado, que suele ser el 4-plano  $\langle 2 \rangle$  (conocido como enlace Hopf, lo podemos ver en el producto de la Figura 4.3.a). Sin embargo, en uno de cada veinte encuentros la resolvasa actúa procesivamente. Dos rondas sucesivas de recombinación procesiva producen el 4-plano  $\langle 2, 1, 1 \rangle$  (el nudo 8), tres rondas sucesivas de recombinación procesiva producen el 4-plano  $\langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$  (el enlace Whitehead) y cuatro rondas de recombinación procesiva producen el 4-plano  $\langle 1, 2, 1, 1, 1 \rangle$ .

Las observaciones con microscopio electrónico muestran que  $O_f = (0)$ , por lo que nos queda encontrar el valor de las variables  $O_b$ ,  $P$  y  $R$ . El siguiente teorema demostrado en [7] nos muestra las posibles soluciones.

**Teorema 4.1.** *Supongamos que los enredos  $O_b$ ,  $P$  y  $R$  satisfacen las siguientes ecuaciones:*

1.  $N(O_b + P) = \langle 1 \rangle$



2.  $N(O_b + R) = \langle 2 \rangle$

3.  $N(O_b + R + R) = \langle 2, 1, 1 \rangle$

Entonces  $\{O_b, R\} = \{(-3, 0), (1)\}, \{(3, 0), (-1)\}, \{(-2, -3, -1), (1)\}$  ó  $\{(2, 3, 1), (-1)\}$ .

Para encontrar la solución usamos que en la tercera ronda el producto es  $\langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$ .

**Corolario 4.2.** *Supongamos que los enredos  $O_b, P$  y  $R$  satisfacen las siguientes ecuaciones:*

1.  $N(O_b + P) = \langle 1 \rangle$

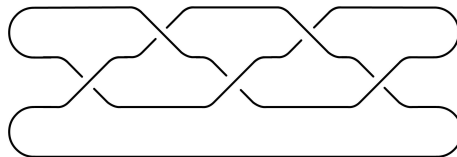
2.  $N(O_b + R) = \langle 2 \rangle$

3.  $N(O_b + R + R) = \langle 2, 1, 1 \rangle$

4.  $N(O_b + R + R + R) = \langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$

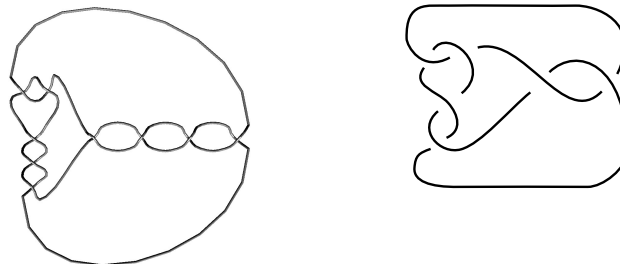
Entonces  $\{O_b, R\} = \{(-3, 0), (1)\}$  y  $N(O_b + R + R + R + R) = \langle 1, 1, 1, 2, 1 \rangle$ .

*Demostración.* La demostración se reduce a probar las posibles soluciones. Es fácil ver que el número de cruces de  $\langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$  (dado que es un enlace alternante reducido) es 5. Además es el enlace Whitehead.

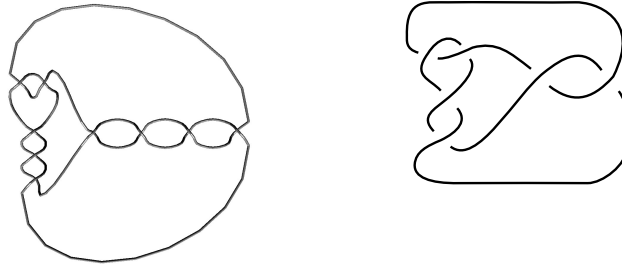


$\langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$

Al observar y manipular los diagramas de las soluciones  $\{(-2, -3, -1), (1)\}$  y  $\{(2, 3, 1), (-1)\}$  concluimos que no pueden ser equivalentes a  $\langle 1, 1, 1, 1, 1 \rangle$  pues el enlace que forman tiene número de cruce 6.

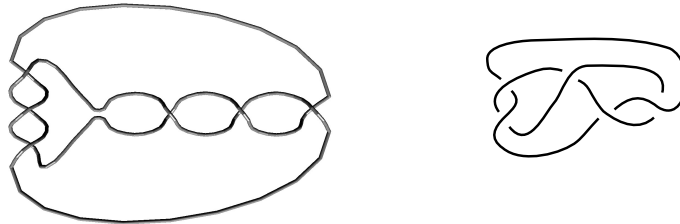


$N((2, 3, 1) + (-1) + (-1) + (-1))$

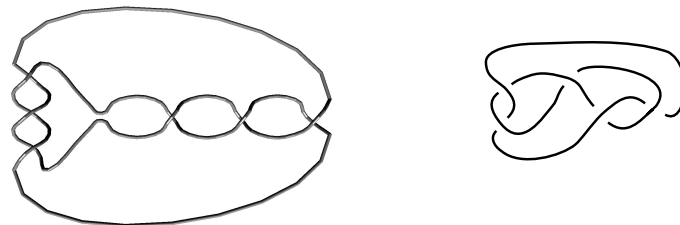


$$\mathbf{N}((-2, -3, -1) + (1) + (1) + (1))$$

Con una ligera manipulación podemos ver que las soluciones  $\{(-3, 0), (1)\}$  y  $\{(3, 0), (-1)\}$  son el enlace Whitehead y su imagen espejo.



$$\mathbf{N}((-3, 0) + (1) + (1) + (1))$$



$$\mathbf{N}((3, 0) + (-1) + (-1) + (-1))$$

Usando el polinomio de Jones y el Teorema 2.14 podemos concluir que el enlace Whitehead no es anfiqueiral:

$$\begin{aligned} V\left(\text{Whitehead}\right) &= t^2 V\left(\text{Whitehead}\right) + t(t^{1/2} - t^{-1/2}) V\left(\text{Whitehead}\right) \\ &= t^2 V\left(\text{Whitehead}\right) + t(t^{1/2} - t^{-1/2}) V\left(\text{Whitehead}\right) \\ &= -t^2(t^{-1/2} + t^{-5/2}) + t(t^{1/2} - t^{-1/2})(t^{-1} + t^{-3} - t^{-4}) \\ &= -t^{3/2} + t^{1/2} - 2t^{-1/2} + t^{-3/2} - 2t^{-5/2} + t^{-7/2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto obtenemos que la única solución es  $\{(-3, 0), (1)\}$ . ■

Ahora la única incógnita es  $P$ , pero debido a que aparece sólo en una ecuación, a que  $O_b$  es un enredo racional y que  $\langle 1 \rangle$  es un 4-plano tenemos que hay una infinidad de enredos racionales que son solución (Teorema 3.7). A pesar de eso muchos biólogos creen que  $P = (0)$  [16].

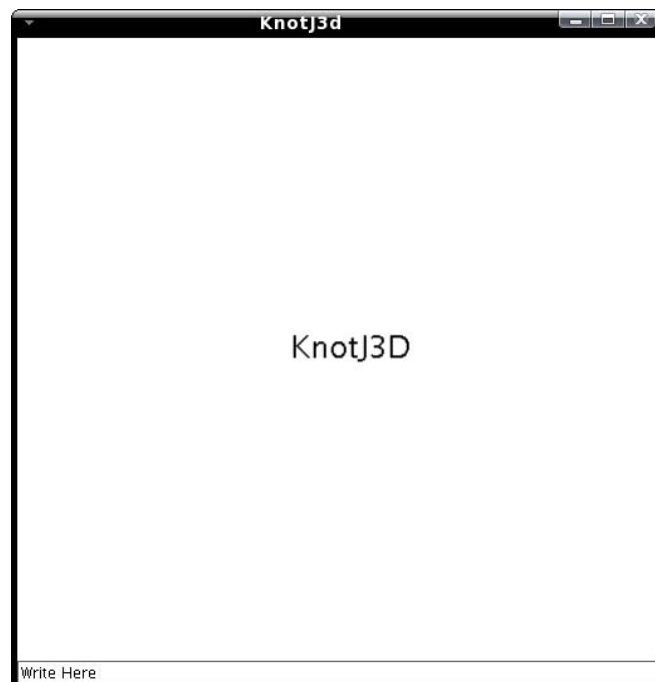
## APÉNDICE A

---

### KnotJ3D

---

Con el propósito de aclarar el manejo de los enredos decidimos desarrollar la herramienta *KnotJ3D*. KnotJ3D y el código pueden ser encontrados anexos a esta tesis o en la página: <http://alfaromontufar.googlepages.com>. En este apéndice explicaremos a “grosso modo” como es que fue desarrollada y como se utiliza.



## A.1 Utilización

En esta sección explicaremos cómo es que debe utilizarse KnotJ3D.

Primero debe verificar que su computadora tenga instalados *Java3d 3D API 1.5.1* y *Java 6 (JDK 6)*, en caso contrario pueden ser descargados de las páginas

*<http://java.sun.com/products/java-media/3D/download.html>*

y

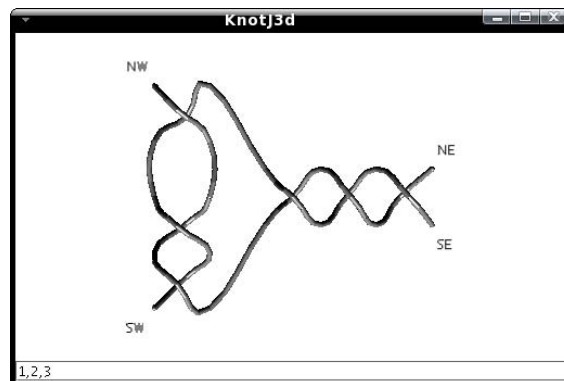
*<http://java.sun.com/javase/downloads/index.jsp>*

respectivamente. En estas páginas pueden ser encontradas instrucciones de instalación.

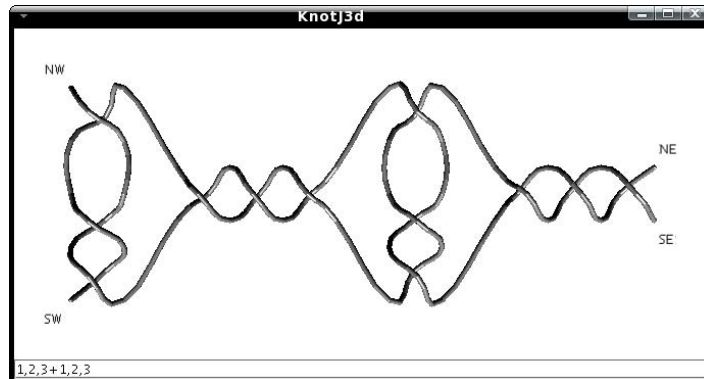
La línea de comandos es donde está escrito “Write Here”. KnotJ3D puede realizar tres operaciones:

1. Graficar enredos.
2. Graficar suma de enredos.
3. Graficar la cerradura de enredos.

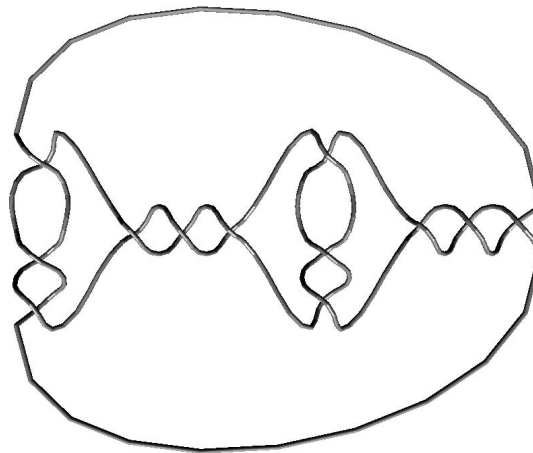
Para crear un enredo se debe escribir un vector sin paréntesis en la línea de comandos y después presionar Enter. Por ejemplo: 1,2,3.



Para crear una suma de enredos se deben escribir dos vectores separados por un signo + y después presionar Enter. Por ejemplo: 1,2,3+1,2,3.



Para crear la cerradura de un enredo, escriba  $N(\text{enredo})$  y después presione Enter. Por ejemplo:  $N(1,2,3+1,2,3)$ .



Puede rotar lo que está graficado presionando el botón izquierdo del ratón mientras mueve el mouse.

Para trasladar lo que está graficado presione el botón derecho del ratón mientras mueve el mouse.

Para acercar o alejar lo que está graficado presione el botón alt del teclado mientras mueve el mouse.

Existen limitaciones sobre los enredos que pueden ser graficados. En una máquina con un procesador intel celeron 3000 Mhz con 1024 Mb de memoria RAM puede graficar un enredo con hasta 200 cruces. Es posible que pueda variar dependiendo de la computadora utilizada.

Cabe mencionar que existe software muy completo que realiza simulaciones o cálculos de invariantes, tales como *Knot* y *KnotPlot*, que pueden ser descargados

desde las páginas <http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kodama/knot.html> y <http://www.knotplot.com/> respectivamente.

## A.2 Código

En esta sección nos dedicaremos a explicar la manera en que trabaja KnotJ3D. Este fue programado en *Java 6* junto con *Java 3D*, que pueden ser descargados desde la página <http://www.sun.com>. Elegimos desarrollarlo en Java por que así sería compatible con la mayoría de los sistemas operativos.

La línea de comandos está diseñada para verificar una expresión, en caso de ser correcta la grafica y en caso contrario manda un mensaje de error. Java 3D contiene utilidades para crear cilindros y esferas, y utilidades para rotarlos y trasladarlos. Por lo que podemos crear una función que reciba de parámetros dos vectores  $x, y \in \mathbb{R}^3$  y nos cree un cilindro con dos esferas en los extremos  $x$  y  $y$ .

Creamos un proceso que dado un entero  $n$  crea una secuencia de  $|n|$  cruces positivos o negativos dependiendo del signo de  $n$ . En seguida daremos el algoritmo que utilizamos para crear enredos.

**Algoritmo:** Crear enredo racional.

- 1 **Recibe** la sucesión de  $n$  enteros  $\{a_i\}_{i=1}^n$ .
- 2 Sea  $L_0$  igual al enredo con  $|a_1|$  cruces positivos o negativos según el signo de  $a_1$ .
- 3 **Para**  $i$  desde 2 hasta  $n$  **hacer**
- 4     Crea un enredo  $L_1$  de  $|a_i|$  cruces positivos o negativos según el signo de  $a_i$ .
- 5     Aplicar la operación  $\mathbb{T}$  al enredo  $L_0$ .
- 6      $L_0 := \mathbb{T}(L_0) + L_1$ .
- 8 **Fin para**
- 9 **Regresa**  $L_0$

Para crear una suma de los enredos  $A$  y  $B$ , unimos los extremos  $NE$  y  $SE$  de  $A$  con los extremos  $NW$  y  $SW$  de  $B$ . Por último unimos los extremos  $NW$  de  $A$  con  $NE$  de  $B$  y  $SW$  de  $A$  con  $SE$  de  $B$ .

Para crear la cerradura de un enredo  $A$ , unimos los extremos  $NW$  con  $NE$  y  $SW$  con  $SE$ .

---

## Bibliografía

---

- [1] ADAMS C. C., *The knot book. An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. American Mathematical Society, 2004.
- [2] BATES A. D. Y MAXWELL A., *DNA Topology*. Oxford University Press, 2005.
- [3] CHMUTOV S., DUZHIN S. Y MOSTOVOY J., *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*, 2007. <http://www.math.ohio-state.edu/~chmutov/preprints/>
- [4] CONWAY J. H., *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*. Computational problems in Abstract Algebra, Proc. Conf. Oxford (1970) 329–358.
- [5] CROMWELL P., *Knots and Links*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] CROWELL R. H. Y FOX R. H., *Introduction to Knot Theory*. Springer Verlag, 1977.
- [7] ERNST C. Y SUMNERS D. W., *A Calculus for Rational Tangles: applications to DNA recombinations*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc., **180** (1990) 489–515.
- [8] FOX R. H., *A Remarkable Simple Closed Curve*. Annals of Mathematics, **50** (1949) 256–265.
- [9] KAUFFMAN L. H., *New invariants in the theory of knots*. American Mathematical Monthly, **95** (1988) 195–242.
- [10] KAWAUCHI A., *The Invertibility Problem on Amphicheiral Excellent Knots*. Proc. Japan Acad. 55 Ser. A, **10** (1979) 399–402.
- [11] MANTUROV V., *Knot Theory*. Chapman & Hall/CRC, 2004.

- 
- [12] MORTON H. R. Y CROMWELL P. R., *Distiguishing mutants by knot polynomials*. Journal of Knot Theory and Its Ramifications, **5** (1996) 225–238.
- [13] MURASUGI K., *Jones Polynomials and classical conjetures in knot theory*. Topology, **26** (1987) 187–194.
- [14] PRZYTYSKI J. H., *A history of knot theory from Vandermore to Jones*. Proceedings of the Mexican National Congress of Mathematics, 1991.
- [15] SUMNERS D. W., *Untangling DNA*. The Mathematical Intelligencer, **12** (1990) 71–80.
- [16] SUMNERS D. W., *Knot Theory and DNA*. American Mathematical Society, **45** (1992) 39–71.
- [17] SUMNERS D. W., *Lifitng the Curtain: Using Topology to Probe the Hidden Action of Enzymes*. Notices of the AMS, **42** (1995) 528–537.
- [18] THISTLETHWAITE M. B., *A spanning tree expansion of the Jones polynomial*. Topology, **26** (1964) 297–309.
- [19] TROTTER H. F., *Non-invertible knots exist*. Topology, **2** (1964) 275–280.
- [20] VAZQUEZ M. Y SUMNERS D. W., *Tangle analysis of Gin site-specific recombination*. Math. Proc. Cam. Phil. Soc., **136** (2004) 565–582.