

# Pilas de arena

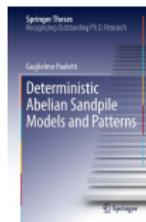
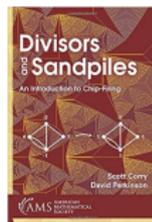
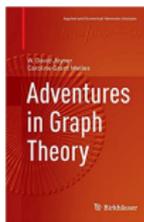
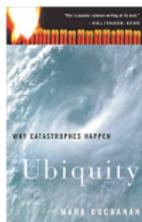
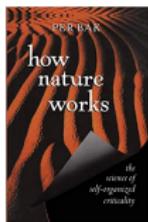
Simposium Análisis y Física Matemática

Carlos A. Alfaro

- 1 Dinámica de las pilas de arena
- 2 Formación de patrones
- 3 Configuraciones recurrentes
- 4 Grupo de pilas de arena
- 5 Grupo de pilas de arena de gráficas planares

El grupo de pilas de arena tiene sus orígenes en física estadística en 1987. Fue el primer modelo de un sistema dinámico con **criticalidad autorganizada**, la cual intenta explicar la ocurrencia de leyes potenciales en diversos fenómenos naturales, desde geofísica y economía hasta neurociencia.

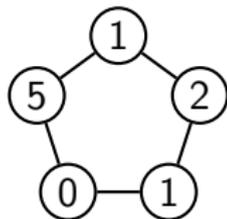
En matemáticas, se ha estudiado desde puntos de vista muy distintos como la geometría aritmética, geometría algebraica, sistemas dinámicos, teoría de gráficas, cadenas de Markov, entre otros.



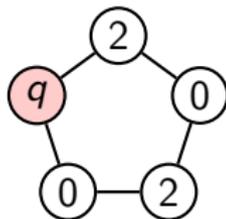
La dinámica de las pilas de arena se desarrolla en una gráfica de la siguiente manera.

Dada una gráfica  $G$ , una **configuración** es un vector  $c$  que asigna a cada vértice un número (no negativo) de granos de arena.

En algunas ocasiones, habrá un vértice especial llamado **sumidero** con la finalidad de coleccionar los granos que “salen del sistema”. Al cual denotaremos por  $q$ .



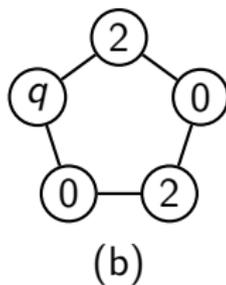
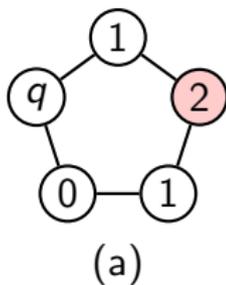
configuración  
(5, 1, 2, 1, 0)



configuración  
con sumidero

Decimos que un vértice  $v$  es **no estable** si el número  $c_v$  de granos de arena en el vértice  $v$  es mayor o igual a su grado  $d_G(v)$ , es decir,  $c_v \geq d_G(v)$ .

Un **desbordamiento** consiste en seleccionar un vértice  $v$  **no estable** y mover  $d_G(v)$  granos de arena a sus vecinos, donde cada vecino  $u$  de  $v$  recibe el número de aristas entre  $u$  y  $v$ .



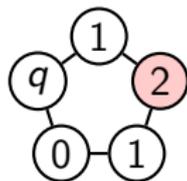
Una configuración  $c$  es **estable** si sus vértices son estables.

### Teorema

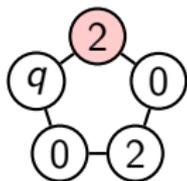
*Toda configuración inestable sobre una gráfica conexa con un sumidero, siempre se podrá estabilizar, después de una secuencia finita de desbordamientos.*

La estabilización de una configuración  $c$  se denotará por  $s(c)$

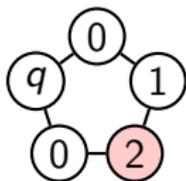
Una **avalancha** es una secuencia finita necesaria para obtener una configuración estable, y su tamaño es el número de desbordamientos utilizados.



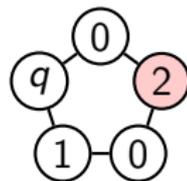
(a)



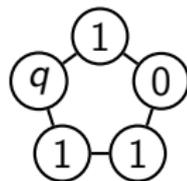
(b)



(c)



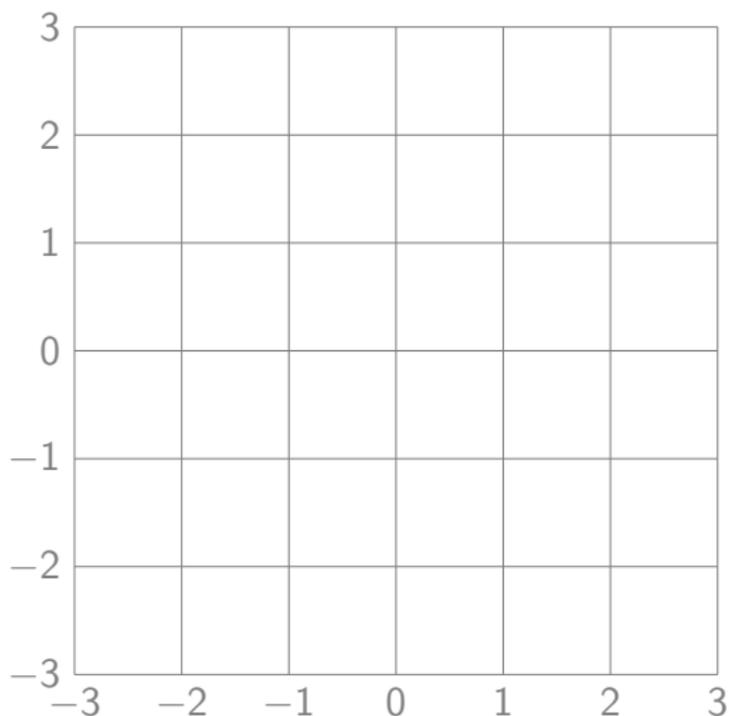
(d)



(e)

Avalancha de tamaño 4.

## Rejilla $7 \times 7$ inmersa en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



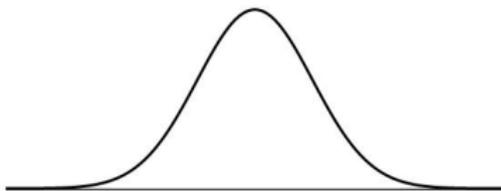
<https://alfaromontufar.github.io/pilasdearena/main.html>

# Sismos

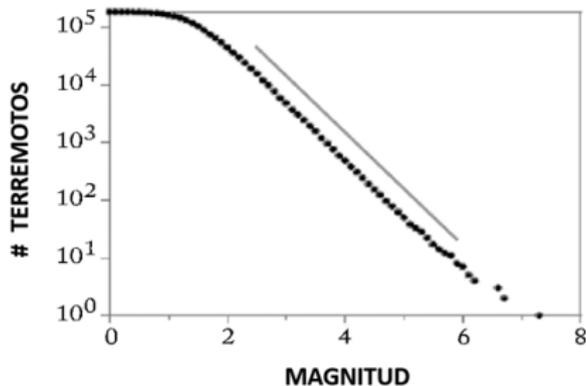
En 1950, Beno Gutenberg y Charles Richter esperaban que al censar los sismos ocurridos en el mundo podrían revelar un patrón significativo que pudiera revelar alguna causa de los terremotos.

Construyeron una tabla de frecuencias relativas de los sismos de diferentes tamaños.

Si hubiera un sismo típico, esperaríamos una campana de Gauss.



Pero no encontraron tal comportamiento, lo que encontraron fue el siguiente patrón.



Si un sismo de magnitud A tiene una magnitud el doble de magnitud que el sismo B, entonces el tipo A es cuatro veces menos frecuente que el tipo B.

A este comportamiento se le conoce como **ley de potencia Gutenberg-Richter**.

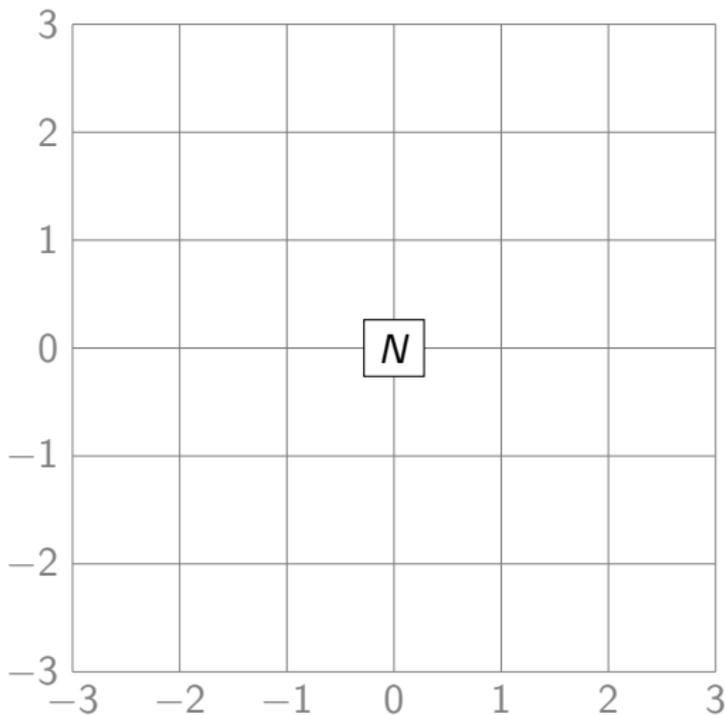
Per Bak, Chao Tang y Kurt Weisenfeld encontraron una relación similar con el juego de las pilas de arena.

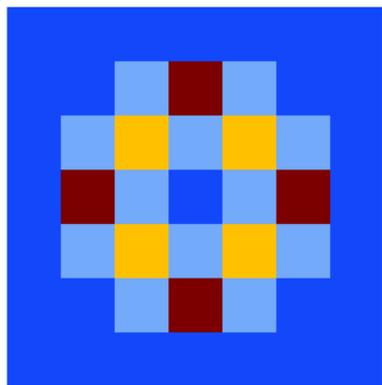
Esta observación los llevo al descubrimiento del **punto crítico** y de los **sistemas autorganizados críticamente**.

\*Per Bak, Chao Tang y Kurt Weisenfeld. Self-organized criticality: An explanation of  $1/f$  noise. **Phys. Rev. Lett.** 59, 381–384.

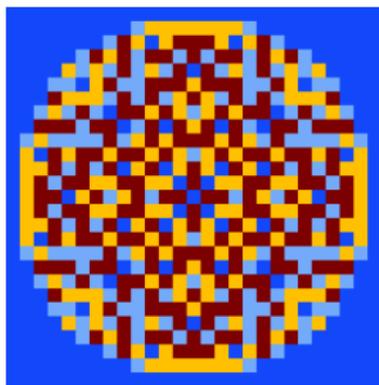
## Formación de patrones

Sobre la rejilla infinita colocamos  $N$  granos de arena en  $(0,0)$  y estabilizamos.

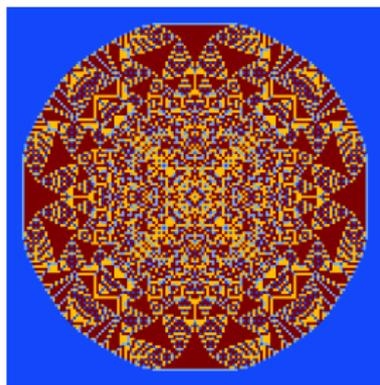




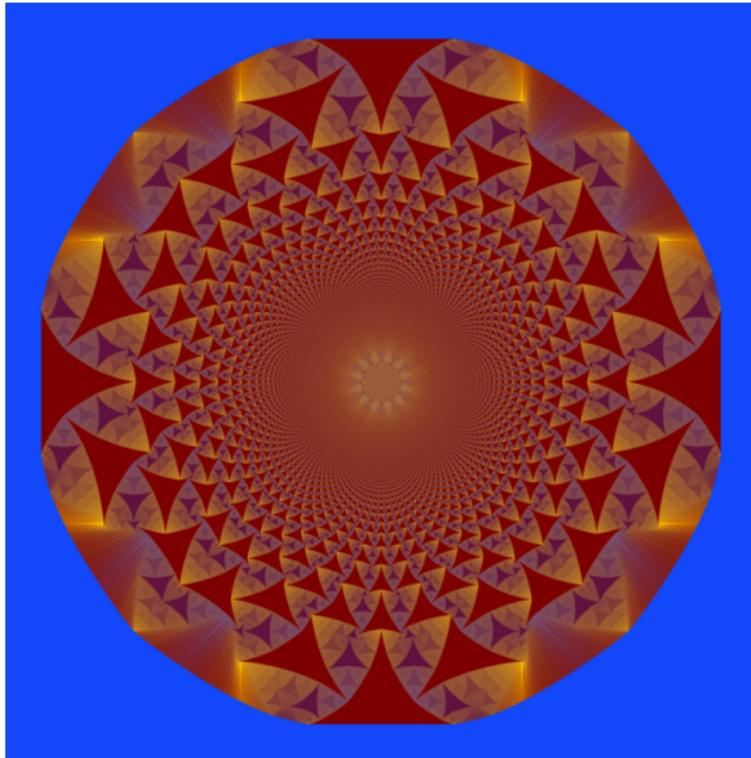
$2^5$



$2^{10}$



$2^{15}$



$2^{30}$

¿Qué pasa cuando  $N$  tiende a  $\infty$ ?

Wesley Pedgen y Charles K. Smart demostraron que existe una función en  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  a la cual converge \*-debilmente.

Su demostración usa técnicas de ecuaciones diferenciales.

Lionel Levine, Wesley Pedgen y Charles K. Smart demostraron que las soluciones a las EDP están relacionadas con **estructuras fractales de Apolonio**.

Algunas referencias:

- Wesley Pedgen y Charles K. Smart, Convergence of the Abelian sandpile, **Duke Math. J.** 162 (2013) 4 627–642.
- Lionel Levine, Wesley Pedgen y Charles K. Smart, Apollonian structure of integer superharmonic matrices. **Annals of Math.** 186 (2017) 1–67.

# Configuraciones recurrentes

La suma de dos configuraciones se hace entrada por entrada.

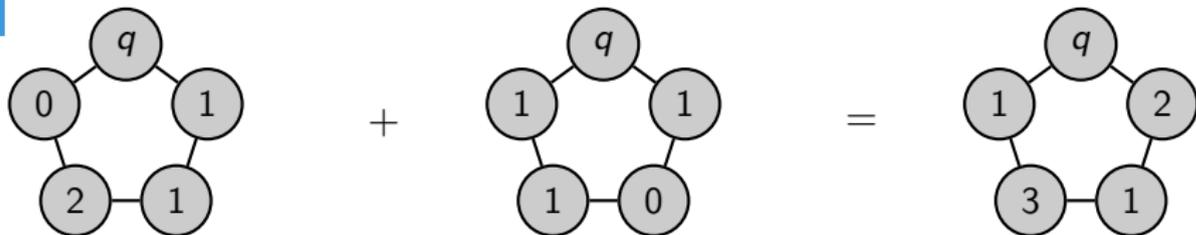


Figura: Suma de configuraciones

## Definición

La **suma de pilas de arena** será denotada por  $c \oplus d$  y es la estabilización de la suma  $c + d$ , es decir,  $c \oplus d := s(c + d)$ .

## Definición

Una configuración  $c$  se dice que es **recurrente** si existe una configuración  $d$  distinta de la configuración cero, tal que,  $s(c + d) = c$ .

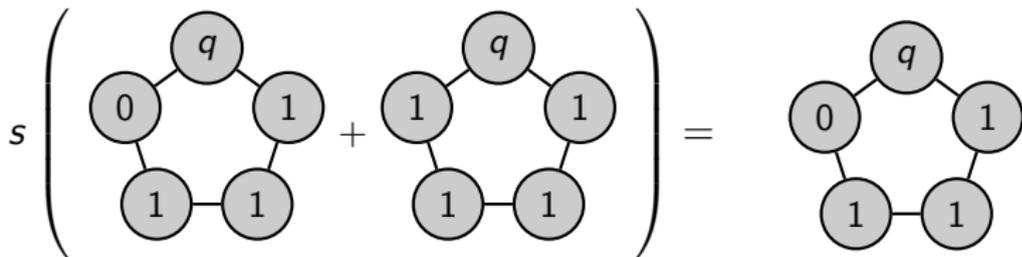
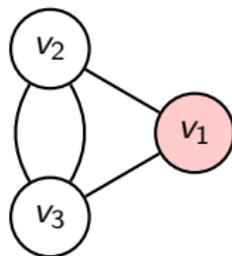
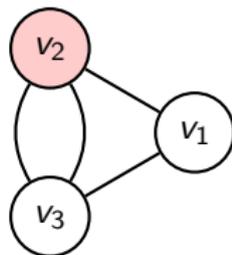


Figura:  $(0,1,1,1)$  es recurrente

Las configuraciones recurrentes dependen del vértice sumidero.


$$\begin{array}{c} (v_2, v_3) \\ \hline (2, 1) \\ (2, 0) \\ (0, 2) \\ (1, 2) \\ (2, 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (v_3, v_1) \\ \hline (1, 0) \\ (2, 0) \\ (0, 1) \\ (1, 1) \\ (2, 1) \end{array}$$

## ¿Cuántas configuraciones recurrentes hay?

### Definición

Sea  $G$  una gráfica. Una **subgráfica generadora** es una subgráfica  $H$  de  $G$  con  $V(H) = V(G)$ .

### Definición

Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos.

### Teorema

*El número de configuraciones recurrentes es igual al número de árboles generadores.*

El número de árboles generadores de  $G$  se denotará por  $\tau(G)$ .

Dada una configuración  $c$ , definimos

$$\text{nivel}(c) = \sum_{v \in V \setminus q} c_v.$$

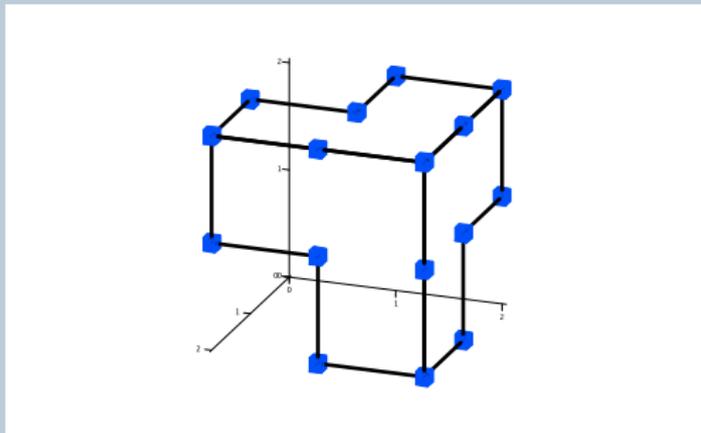
### Teorema

Sea  $G = (V, E)$  una gráfica con sumidero  $q$  y sea  $c$  una configuración recurrente, entonces

$$|E| - \deg_G(q) \leq \text{nivel}(c) \leq 2|E| - \deg_G(q) - |V| + 1$$

## Ejemplo

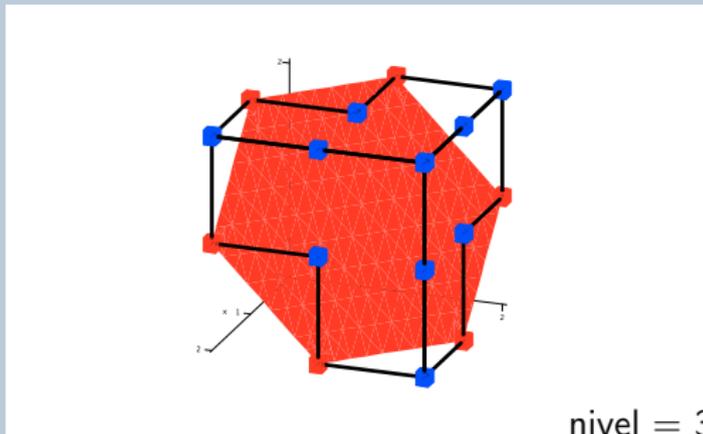
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 16 configuraciones recurrentes

## Ejemplo

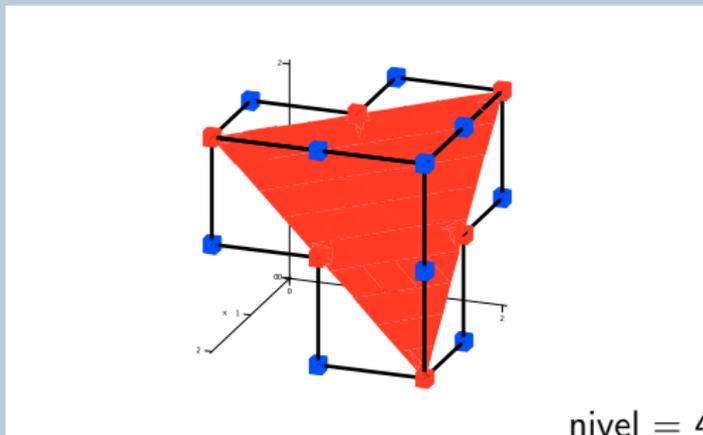
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 6 configuraciones recurrentes con nivel 3

## Ejemplo

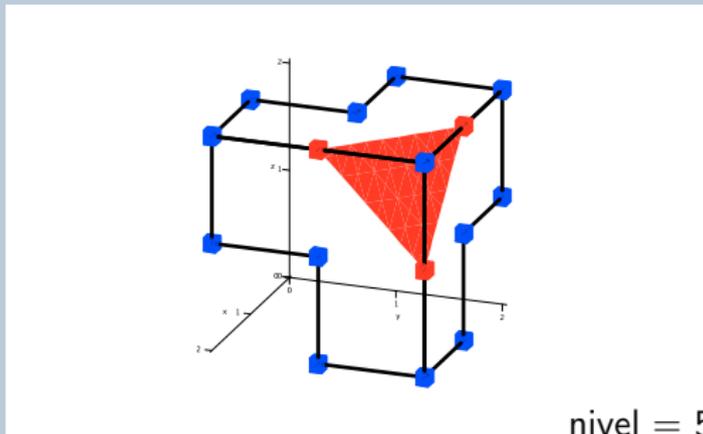
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 6 configuraciones recurrentes con nivel 4

## Ejemplo

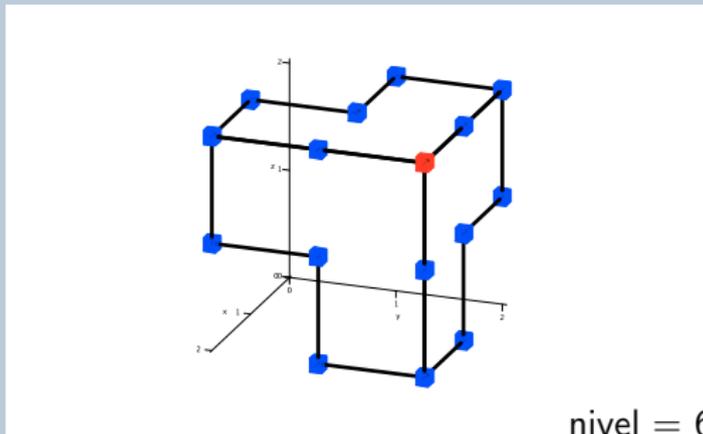
Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 3 configuraciones recurrentes con nivel 5

## Ejemplo

Consideremos las configuraciones recurrentes de  $K_4$ .



$K_4$  tiene 1 configuración recurrentes con nivel 6

Para  $i \geq 0$ , tomemos  $n_i$  como el número de configuraciones recurrentes con nivel  $i + |E| - \deg(q)$ .

La **función generadora** de las configuraciones críticas es el polinomio

$$P(G; y) = \sum_{i=0}^{|E|-|V|+1} n_i y^i$$

## Definición

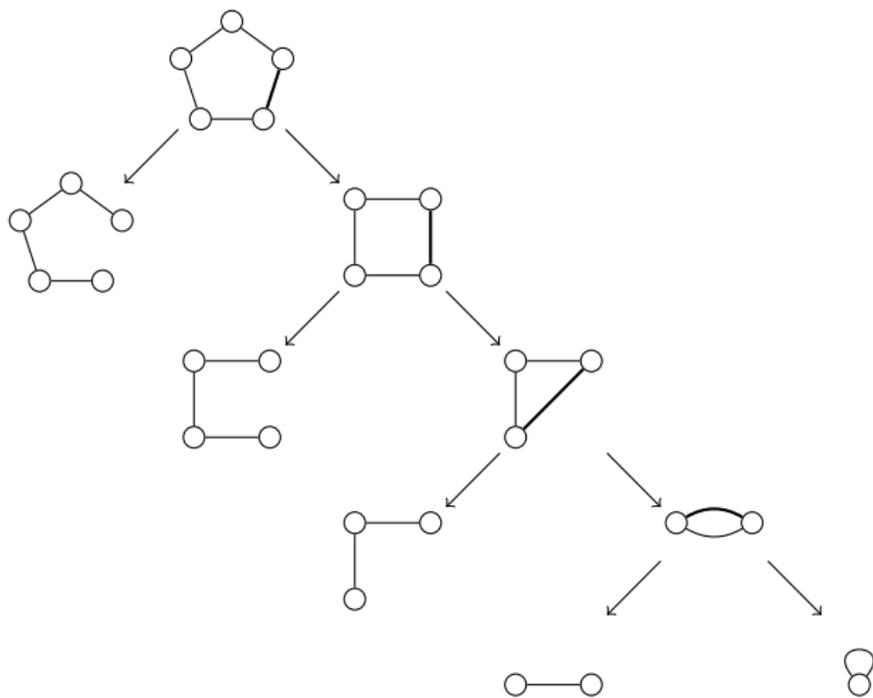
Sea  $G$  una gráfica. El **polinomio de Tutte** de  $G$  es el polinomio  $T(G; x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$  definido como sigue:

$$T(G; x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } E(G) = \emptyset, \\ xT(G/e) & \text{si } e \text{ es un puente,} \\ yT(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ es un lazo,} \\ T(G/e; x, y) + T(G \setminus e; x, y) & \text{si } e \text{ no es ni lazo ni puente} \end{cases}$$

donde

- $G/e$  denota la contracción de la arista  $e$ ,
- $G \setminus e$  denota la eliminación de la arista  $e$ .

## Polinomio de Tutte del ciclo de 5 vértices.



$$T(C_5; x, y) = x^4 + x^3 + x^2 + x + y$$

## Teorema (Merino 1997)

La función generadora de las configuraciones recurrentes es el polinomio de Tutte a lo largo de la línea  $x = 1$ ,

$$P(G, y) = T(G; 1, y).$$

Entonces

$$P(C_5, y) = 4 + y.$$

Además, el polinomio de  $K_4$  es

$$T(K_4; x, y) = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 2x + 2y + y^3 + x^3.$$

Por lo tanto,

$$P(K_4, y) = 6 + 6y + 3y^2 + y^3.$$

\*C. Merino. Chip firing and the tutte polynomial. *Annals of Combinatorics* (1997) 253–259.

## Teorema

*El conjunto  $\mathcal{C}$  de las configuraciones recurrentes junto con la suma de pilas de arena  $\oplus$  forman un grupo finito abeliano.*

Recordemos que un grupo abeliano  $(\mathcal{C}, \oplus)$  satisface

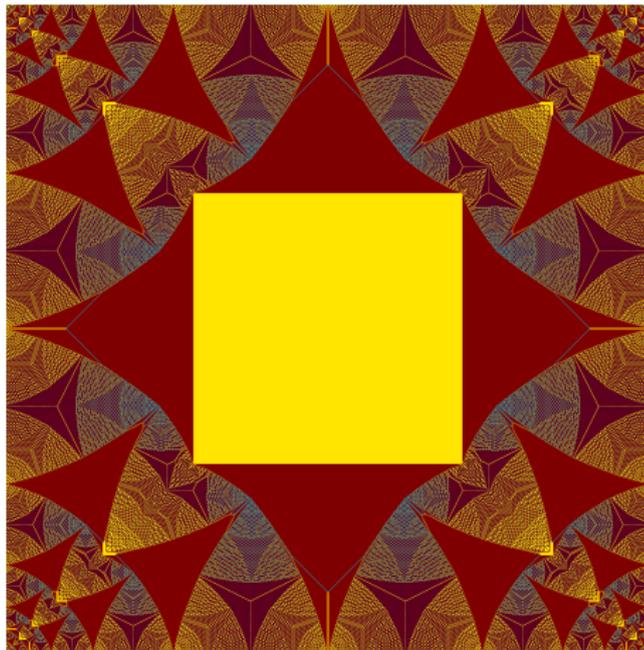
- (cerrado) si  $a, b \in \mathcal{C}$ , entonces  $a \oplus b \in \mathcal{C}$ ,
- (asociativo) si  $a, b, c \in \mathcal{C}$ , entonces  $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ ,
- (identidad)  $\forall a \in \mathcal{C}$ , existe  $e \in \mathcal{C}$  tal que  $a \oplus e = e \oplus a = a$
- (inverso)  $\forall a \in \mathcal{C}$ , existe  $b \in \mathcal{C}$  tal que  $a \oplus b = b \oplus a = e$ ,
- (conmutativo)  $\forall a, b \in \mathcal{C}$ , se tiene  $a \oplus b = b \oplus a$

Este grupo es conocido como el **grupo de pilas de arena**, el cual denotaremos por  $K(G)$ .

Para nuestro ejemplo sobre el ciclo de 5 vértices, las configuraciones recurrentes son  $(0, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1, 0)$  y  $(1, 1, 1, 1)$ .

- ¿Podría verificar que estas configuraciones junto con la operación  $\oplus$  forman un grupo abeliano?
- ¿Qué configuración es la identidad?

# Identidad en la rejilla 1000x1000



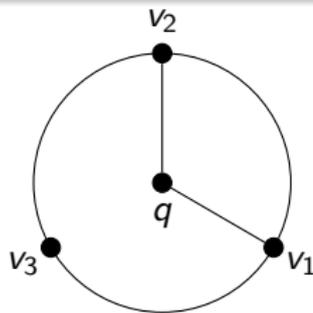
# Matriz Laplaciana

## Definición

La **matriz Laplaciana** es la matriz (con las filas y columnas indexadas con los vértices de  $G$ ), tal que la entrada  $uv$  esta definida por

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} \text{deg}_G(v) & \text{si } u = v, \\ -m_{u,v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde  $m_{u,v}$  es el número de aristas entre  $u$  y  $v$ .



$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

# Estructura del grupo de pilas de arena

## Definición

La forma normal de Smith (SNF) de la matriz  $M$  es la única matriz diagonal

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$$

equivalente a  $M$  tal que  $r$  es el rango de  $M$  y  $d_i | d_j$  para  $i < j$ . Los enteros  $d_i$  se llaman **factores invariantes**.

Una matriz es equivalente a otra si se obtiene al

- Intercambiar dos filas o dos columnas,
- sumar un múltiplo entero de una fila (o columna) a otra,
- multiplicar una fila (o columna) por  $-1$ .

## Teorema

Sean  $d_1, \dots, d_r$  los factores invariantes de  $L(G)$ , entonces

$$K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}.$$

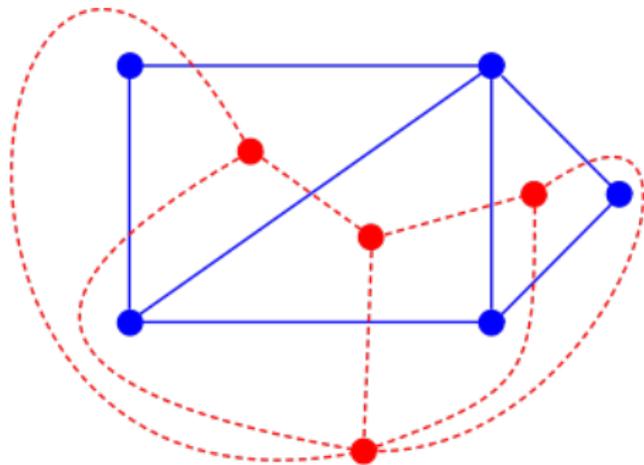
## Proposición

Si  $K_n$  es la gráfica completa de  $n$  vértices. Entonces

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n.$$

$$L(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \sim \text{diag}(1, n, \dots, n, 0)$$

# Gráfica plana y su dual



Teorema (Vince 1991, Cori & Rossin 2000)

Si  $G$  es plana y  $G^*$  es dual de  $G$ , entonces  $K(G) \cong K(G^*)$

El dual de  $C_n$  es la gráfica banana  $B_n$



cuya matriz Laplaciana es

$$\begin{bmatrix} n & -n \\ -n & n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que  $K(C_n) \cong K(B_n) \cong \mathbb{Z}_n$ .

- A. Vince, Elementary divisors of graphs and matroids, **Europ. J. Combinat.** 12 (1991) 445–453.
- R. Cori, D. Rossin, On the sandpile group of dual graphs, **European J. Combin.** 21 (2000) 447–459.

# Gráficas con vértices de corte

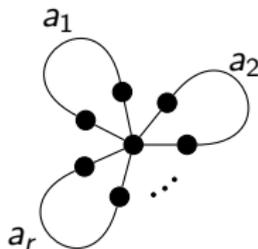
## Proposición

Sea  $G$  una gráfica cuyos bloques son  $B_1, \dots, B_m$ , entonces

$$K(G) \cong K(B_1) \oplus \dots \oplus K(B_m)$$

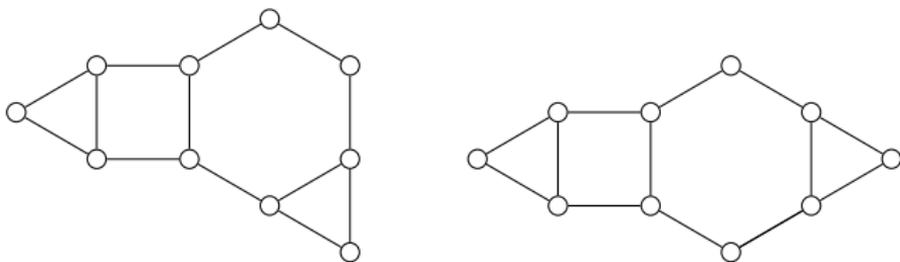
Dado un grupo finito abeliano  $\Gamma$ , ¿existe una gráfica  $G$  tal que  $K(G) = \Gamma$ ? Sí, basta tomar a  $G$  como un wedge de ciclos.

$$\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_r}$$



## Grupo de pilas de arena de gráficas planares

Sea  $(k_1, \dots, k_n)$  una sucesión de enteros donde  $k_i \geq 2$ . Denotemos por  $PC_0$  al camino de una arista. Para  $1 \leq i \leq n$ , defina  $PC_i$  de la gráfica  $PC_{i-1}$  al unir un camino de  $k_i - 1$  aristas entre cualquier par de vértices adyacentes del camino agregado en  $PC_{i-1}$ . La gráfica  $PC_n$  consiste de una pila de  $n$  polígonos con  $k_1, \dots, k_n$  lados, respectivamente. La gráfica  $PC_n$  se conoce como **cadena de polígonos**.



Dos gráficas  $PC_4$  con  $(3, 4, 6, 3)$

## Teorema (Krepkiy 2014, Becker & Glass 2016)

*El grupo de pilas de arena de  $PC_n$  es cíclico cuyo orden satisface la siguiente relación de recurrencia*

$$\tau(PC_n) = k_n \tau(PC_{n-1}) - \tau(PC_{n-2}).$$

### Referencias:

- R. Becker, D.B. Glass, Cyclic critical groups of graphs, **Australas. J. Combin.** 64 (2016) 366–375.
- I.A. Krepkiy, The sandpile groups of chain-cyclic graphs, **J. Math. Sci.** 200 (2014) 698–709.

Una **flor poligonal**  $F = F(C_l; PC_{n_1}, \dots, PC_{n_l})$  se construye al identificar, para  $i \in \{1, \dots, l\}$ , las aristas  $e_i \in C_l$  y  $e'_i \in PC_{n_i}$  tal que  $e'_i$  está en el primer o último polígono de  $PC_{n_i}$  y no está contenida en otro polígono de la cadena de polígonos.

### Teorema (Chen & Mohar 2019)

Sea  $F = F(C_l; PC_{n_1}, \dots, PC_{n_l})$  una flor poligonal. Para

$j \in \{1, \dots, l-2\}$ ,

$\Delta_j = \gcd(\tau(PC_{n_{i_1}}) \cdots \tau(PC_{n_{i_j}}) : 1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq l)$ . Entonces

$$K(F) = \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\Delta_{t-2}}{\Delta_{t-3}}} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\tau(F)}{\Delta_{t-2}}}.$$

\*H. Chen, B. Mohar, The sandpile group of a polygon flower, **Discrete Appl. Math.** 270 (2019) 68–82.

La gráfica dual débil de una gráfica outerplana biconexa es un árbol.

Denotemos por  $d(\mathcal{M})$  al determinante de la submatriz de  $c(G) = \text{diag}(c(F_1), \dots, c(F_s)) - A(T)$  formado al seleccionar las filas y columnas asociados a los lazos de  $\mathcal{M}$  de  $T'$ .

### Teorema (A. & Villagrán 2021)

Sea  $G$  una gráfica plana biconexa cuyo dual débil es el árbol  $T$  con  $n$  vértices. Sea  $\Delta_i = \text{mcd}(\{d(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in 2M_k^*(T')\})$ . Entonces,  $K(G) \cong \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}$  and  $\tau(G) = \Delta_n$ .

\*C.A. Alfaro y R.R. Villagrán. The structure of sandpile groups of outerplanar graphs. **Appl. Math. Comput.** (2021) 125861.

¡Gracias!  
Carlos A. Alfaro  
alfaromontufar@gmail.com

