


# Optimización de costos de acuñación de moneda



Carlos A. Alfaro

Banco de México



# Contenido

- Programación Lineal
- Descripción del problema
- Capacidades y costos de producción de moneda
- Modelo de optimización
- Simulación
- Beneficios por la optimización
- Conclusiones

# Programación lineal

Función objetivo



$$\max \quad 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leq 9 \quad (\text{I.1})$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18 \quad (\text{I.2})$$

$$x_1 \leq 7 \quad (\text{I.3})$$

$$x_2 \leq 6 \quad (\text{I.4})$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Restricciones



# Programación lineal

Función objetivo

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

Restricciones

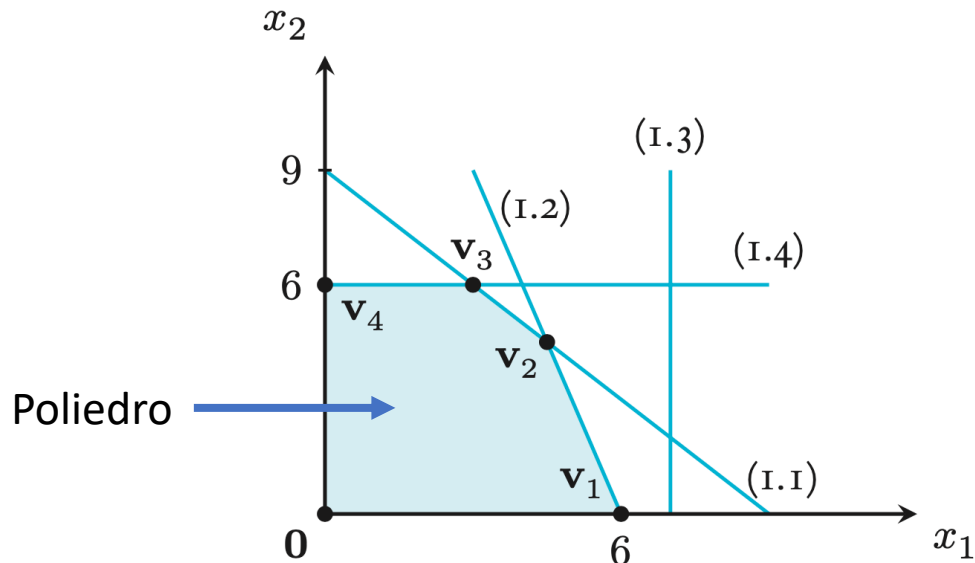
$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 9 \quad (\text{I.1})$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18 \quad (\text{I.2})$$

$$x_1 \leq 7 \quad (\text{I.3})$$

$$x_2 \leq 6 \quad (\text{I.4})$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$



# Programación lineal

Función objetivo

$$\max 3x_1 + 2x_2$$

Restricciones

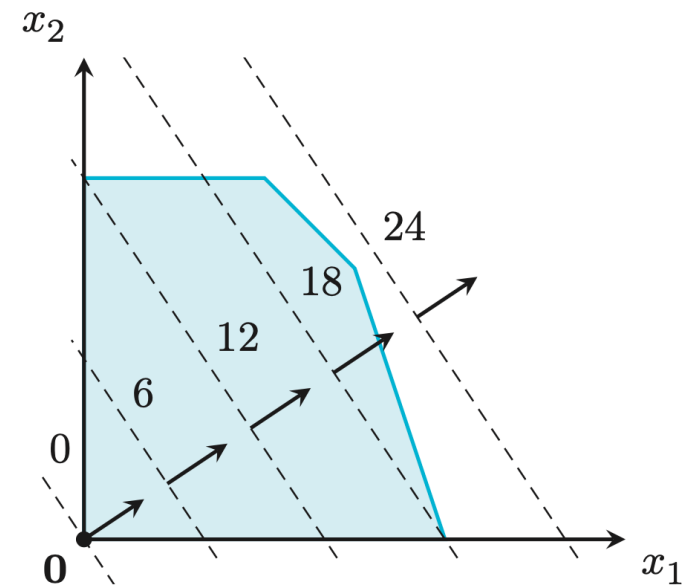
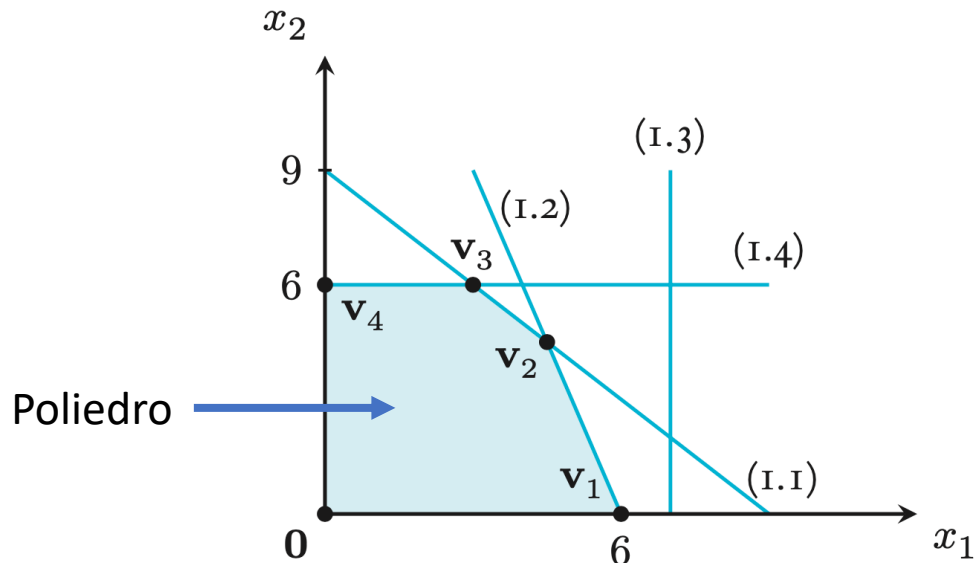
$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 9 \quad (\text{I.1})$$

$$3x_1 + x_2 \leq 18 \quad (\text{I.2})$$

$$x_1 \leq 7 \quad (\text{I.3})$$

$$x_2 \leq 6 \quad (\text{I.4})$$

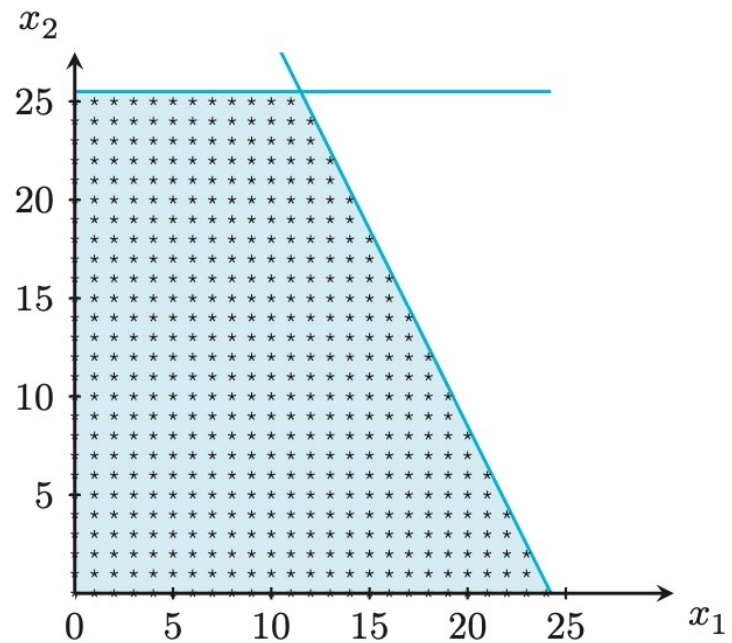
$$x_1, x_2 \geq 0.$$



# Programación lineal entera

- En la programación lineal entera se pide que las variables sean enteras
- La PLE está en NP-duros
- Las técnicas son más complejas (Heurísticas, Branch&Bound, Deep Learning)

$$\begin{aligned} \max & 1000x_1 + 700x_2 \\ \text{s.t.} & 100x_1 + 50x_2 \leq 2425 \\ & 20x_2 \leq 510 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad \text{enteros} \end{aligned}$$



## Descripción del problema

- El Banco de México (BM) tiene entre sus finalidades proveer de **efectivo** a la economía del país.
- Específicamente para la moneda metálica, el BM es el responsable de planear la **producción y distribución** de moneda corriente que acuña la Casa de Moneda.
- Mediante una **orden de acuñación**,  $f_t$ , el BM detalla el número de piezas a fabricar en cada trimestre.
- El proceso de fabricación de moneda consiste en 3 procesos: **Corte, Horno y Acuñación**.
- El BM paga a la CMM una renta anual que contempla el uso del nivel **básico** de los tres procesos.
- Si el BM requiriera mayor capacidad en alguno de estos procesos, el BM puede contratar terceros turnos para producir la orden de acuñación.

# Descripción del problema

Minimizar el costo de los terceros turnos

Al satisfacer las capacidades de producción de la CMM

Adicionalmente:

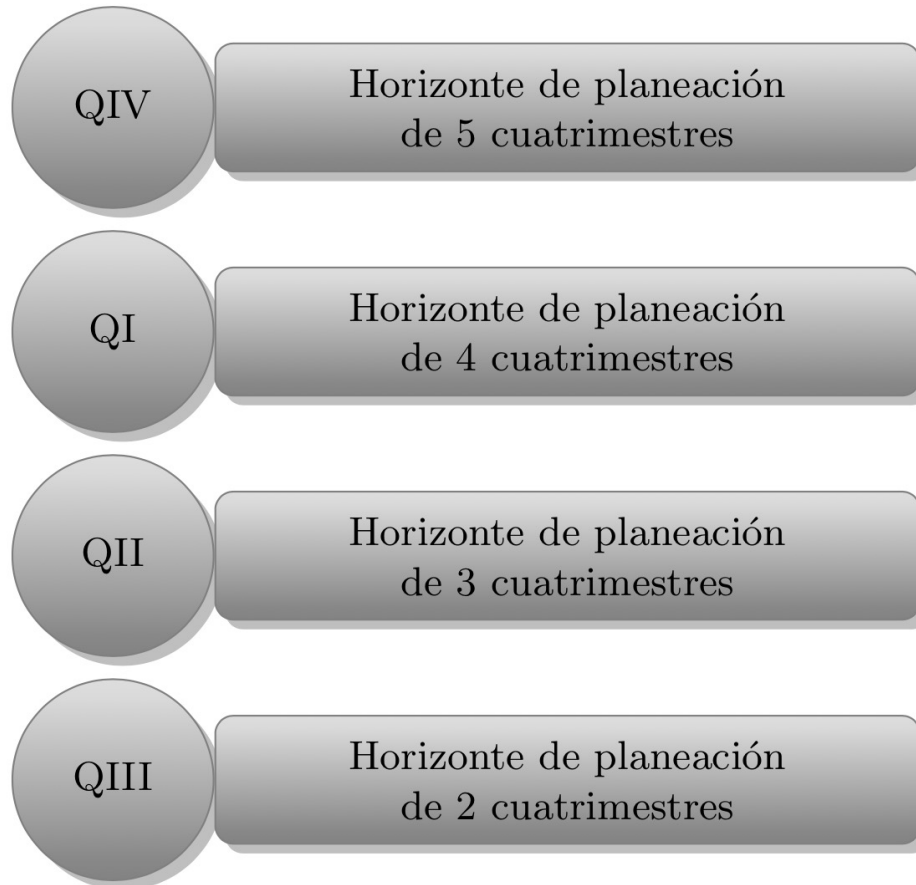
- Satisfacer las demandas trimestrales de moneda,
- No sobre pasar la capacidad de las bóvedas,
- Mantener al menos el inventario mínimo para operar.

Nuestro modelo no contempla el costo del metal, pues la CMM es quién gestiona la compra y el almacenamiento del metal.



# Descripción del problema

Evolución del horizonte de planeación dependiendo del cuatrimestre



# Capacidades trimestrales de producción de la CMM

- El primer proceso en la línea de producción es el **corte**. Este consiste en obtener las partes que conforman las monedas: **núcleos y arillos**. Para medir el consumo de este recurso utilizamos el **número,  $D(\mathbf{f}_t)$ , de días** necesarios para producir la orden de acuñación.

$$\mathcal{C}(\mathbf{f}_t) = \begin{cases} 0, & \text{if } D(\mathbf{f}_t) \leq x_0, \\ C_1, & \text{if } x_0 < D(\mathbf{f}_t) \leq x_1, \\ \vdots & \\ C_{nc} & \text{if } x_{nc-1} < D(\mathbf{f}_t) \leq x_{nc}, \end{cases}$$

## Capacidades trimestrales de producción de la CMM

- El proceso de **recocido en horno** es utilizado para controlar la dureza de las partes de la moneda que contienen una aleación basada en cobre. El uso trimestral del proceso de recocido se determina por la **suma**  $W(\mathbf{f}_t)$  **de los pesos** de las partes hechas de esas aleaciones que se fabricaron en un trimestre.

$$\mathcal{H}(\mathbf{f}_t) = \begin{cases} 0, & \text{if } W(\mathbf{f}_t) \leq y_0 \text{ Ton.} \\ H, & \text{if } y_0 < W(\mathbf{f}_t) \leq y_1 \text{ Ton.,} \end{cases}$$

## Capacidades trimestrales de producción de la CMM

- El proceso de **acuñación** es donde se imprimen y sellan las caras de la moneda. El uso de este recurso se mide directamente por el **número de piezas** que se acuñan en un trimestre y es independiente de la denominación.

$$\mathcal{A}(\mathbf{f}_t) = \begin{cases} 0, & \text{if } N(\mathbf{f}_t) \leq z_0 \\ A_1, & \text{if } z_0 < N(\mathbf{f}_t) \leq z_1 \\ \vdots & \\ A_{na}, & \text{if } z_{na-1} < N(\mathbf{f}_t) \leq z_{na} \end{cases}$$

# Modelo de optimización

---

<b>Índices</b>	
$i$	$i$ -ésimo nivel de tercer turno de corte
$j$	$j$ -ésimo nivel de tercer turno de acuación
$t$	cuatrimestre $t \in \{1, \dots, T\}$
$d$	denominación

---

<b>Parámetros</b>	
$T$	número de cuatrimestres en el horizonte de planeación
$C_i$	costo del $i$ -ésimo nivel de terceros turnos de corte
$A_j$	costo del $j$ -ésimo nivel de terceros turnos de acuñación
$H$	costo del tercer turno de horno
$P_t^d$	pronóstico de la demanda de moneda de la denominación $d$ en el cuatrimestre $t$
$IMAX$	capacidad máxima de bóveda
$IMIN^d$	inventario mínimo de la denominación $d$
$x_i$	cota superior para el número de días laborales requeridos por el $i$ -ésimo nivel de corte
$y_1$	cota superior para el peso requerido en el tercer turno de horno
$z_j$	cota superior para el número de monedas acuadas por el $j$ -ésimo nivel acuñación

---

**Variables**

---

$c_t^i$	variable binaria que asigna el $i$ -ésimo nivel de los terceros turnos de corte
$h_t$	variable binaria que representa si se está usando el tercer turno de horno
$a_t^j$	variable binaria que asigna el $j$ -ésimo nivel de los terceros turnos de acuñación
$f_t^d$	variable que representa el número de monedas acuñadas de la denominación $d$ en el cuatrimestre $t$
$E_t^d$	variable que representa el inventario de moneda de la denominación $d$ en el cuatrimestre $t$
$K$	variable que maximiza el uso de los niveles de producción

---

$$h_t = \begin{cases} 1, & \text{si se utiliza el recocido en horno en tercer turno durante el trimestre } t \\ 0, & \text{si se utiliza el recocido en horno en producción base durante el trimestre } t \end{cases}$$

$$a_t^j = \begin{cases} 1, & \text{si en el trimestre } t \text{ se utiliza el nivel de acuñación } j \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$c_t^i = \begin{cases} 1, & \text{si en el trimestre } t \text{ se utiliza el nivel de corte } i \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

• Minimizar: 
$$\sum_t \sum_i C_i c_t^i + \sum_t H h_t + \sum_t \sum_j A_j a_t^j - K$$

• Sujeto a:

(1)  $\forall t, \quad W(\mathbf{f}_t) \leq y_0 + (y_1 - y_0)h_t$

(2)  $\forall t, \quad \sum_d f_t^d \leq z_0 + \sum_j (z_j - z_0) a_t^j$

(3)  $\forall t, \quad \sum_j a_t^j \leq 1$

(4)  $\forall t, \quad D(\mathbf{f}_t) \leq x_0 + \sum_i (x_i - x_0) c_t^i$

(5)  $\forall t, \quad \sum_i c_t^i \leq 1$

(6)  $\forall t, d, \quad E_t^d = E_{t-1}^d + f_t^d - P_t^d$

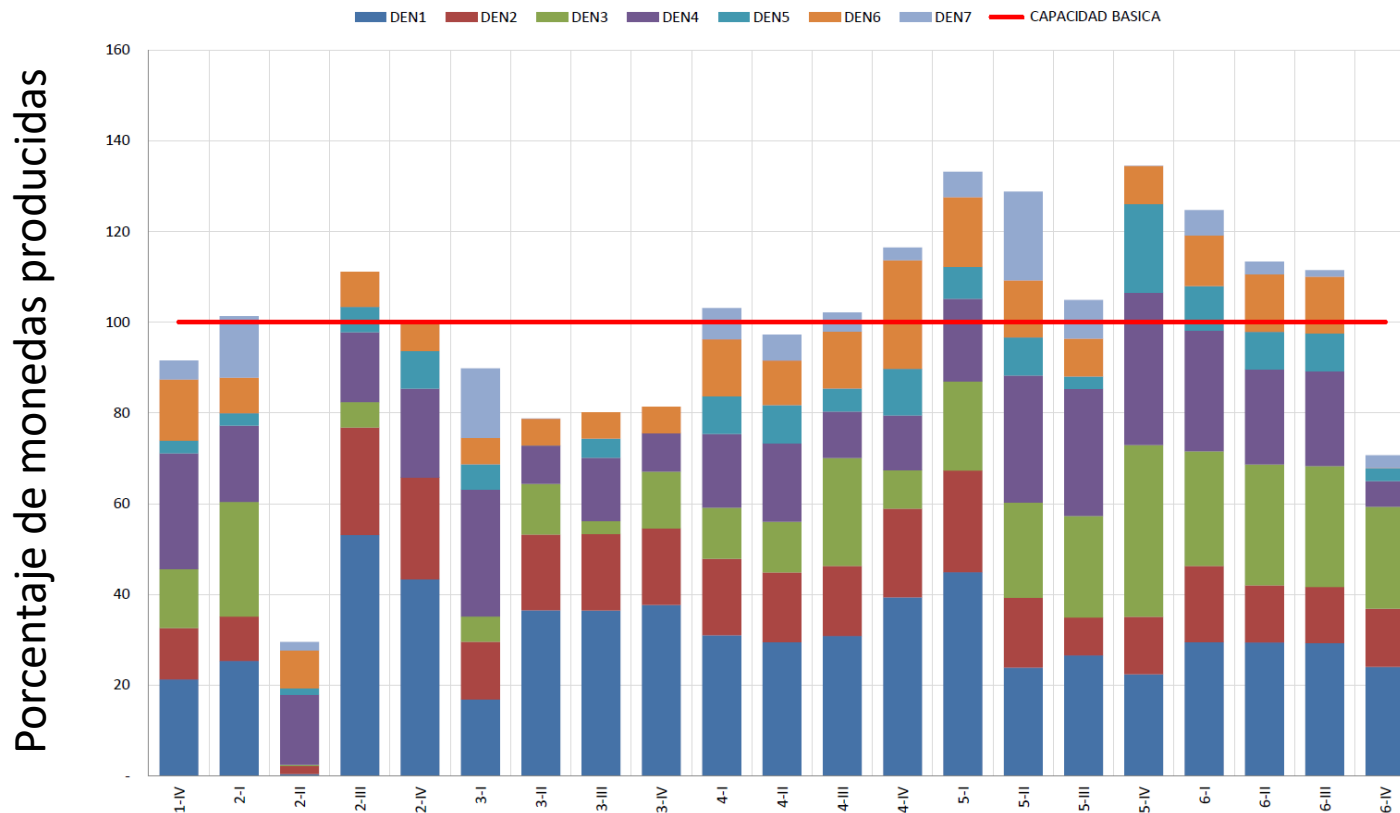
(7)  $\forall d, \quad E_T^d \geq IMIN^d K$

(8)  $\forall t, \quad \sum_d E_t^d \leq IMAX$

(9)  $\forall t, d, \quad E_t^d \geq IMIN_t^d$

# Datos históricos

- Datos reales de 21 cuatrimestres consecutivos.
- En el cuatrimestre 2-II hubo una limitación en la producción debido a un problema de suministro de gas.
- Mantendremos esa restricción en la simulación.





## Heurísticas adicionales

- Si la solución del modelo utiliza menos de la capacidad base de alguna de los procesos, entonces trataremos que el modelo use completamente la capacidad básica siempre y cuando el costo de los terceros turnos no aumente.

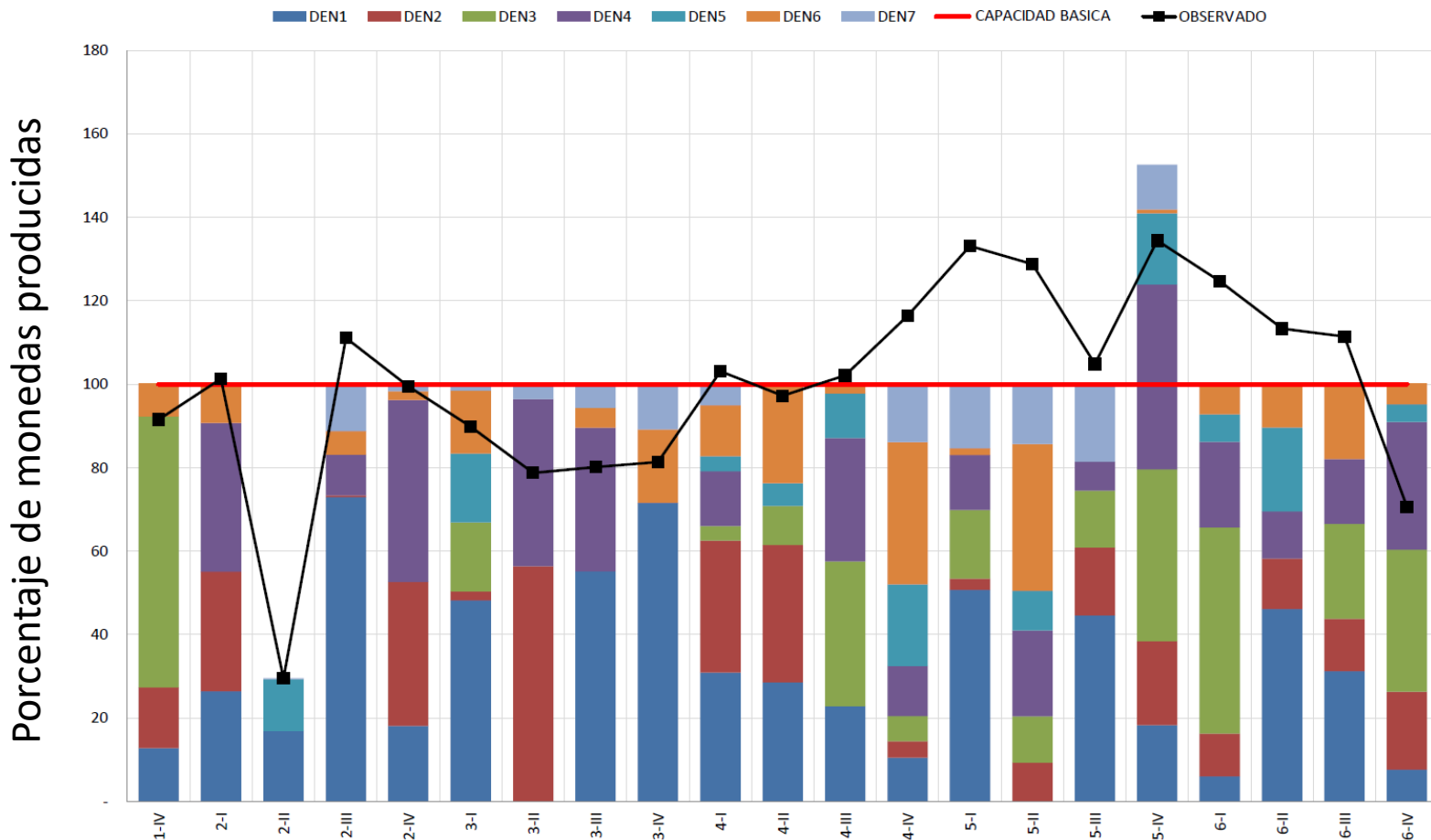
$$\text{(acuñación)} \quad \sum_d f_1^d = z_0 \quad \text{o} \quad \text{(corte)} \quad D(\mathbf{f}_1) = x_0.$$

- Si la solución del modelo utiliza un turno extra de alguno de los procesos, entonces intentaremos postergarlo mientras que esto no implique un aumento en los costos de los terceros turnos.

$$\text{(acuñación)} \quad \sum_j a_1^j = 0, \quad \text{(corte)} \quad \sum_i c_1^i = 0, \quad \text{u} \quad \text{(horno)} \quad h_1 = 0.$$

# Simulación

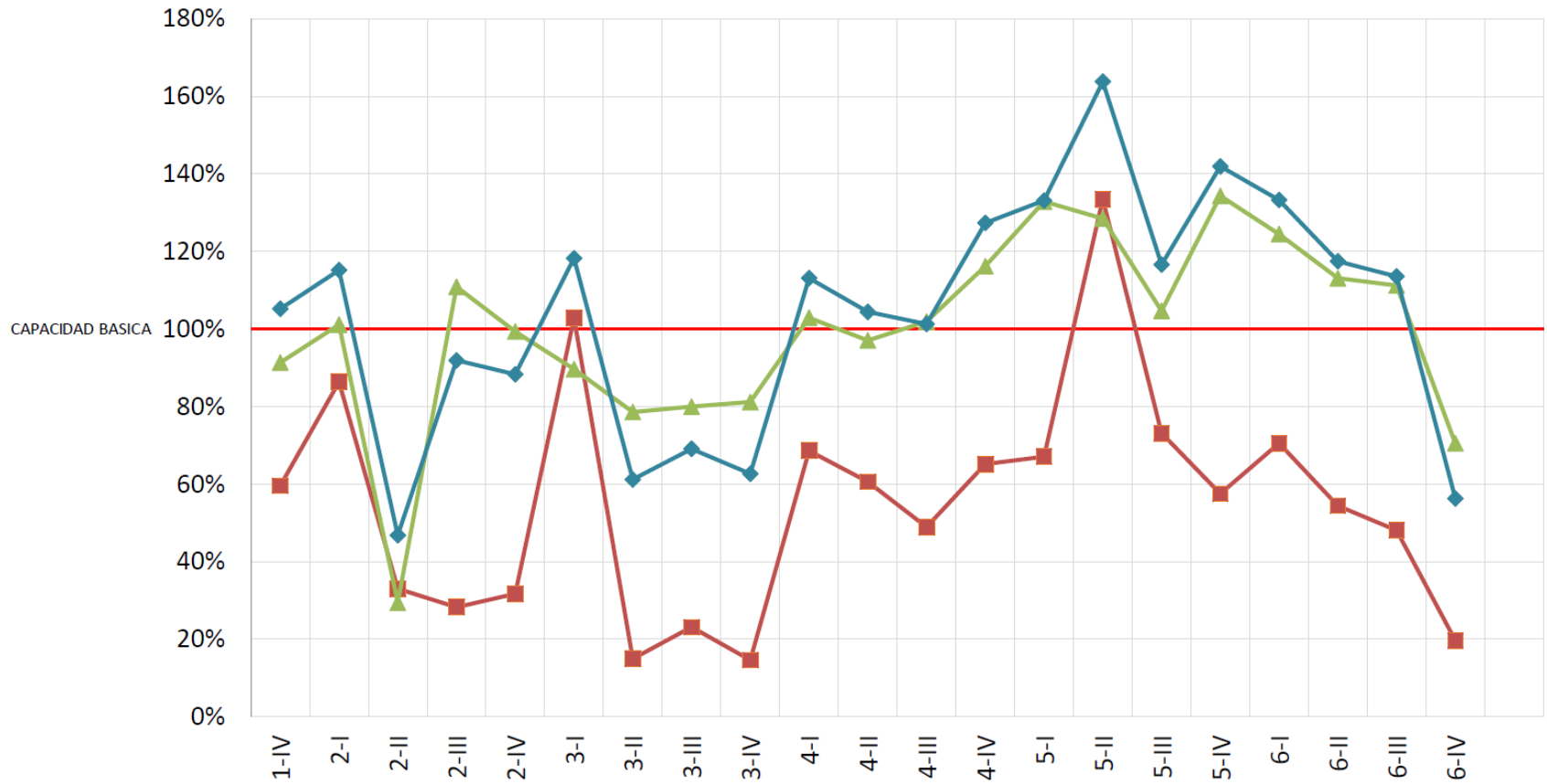
- La simulación se implementó en C++,
- Para resolver el modelo usamos el método de “Ramificación-y-Poda” implementado en la librería GLPK.



# Beneficios por la optimización de las órdenes de producción

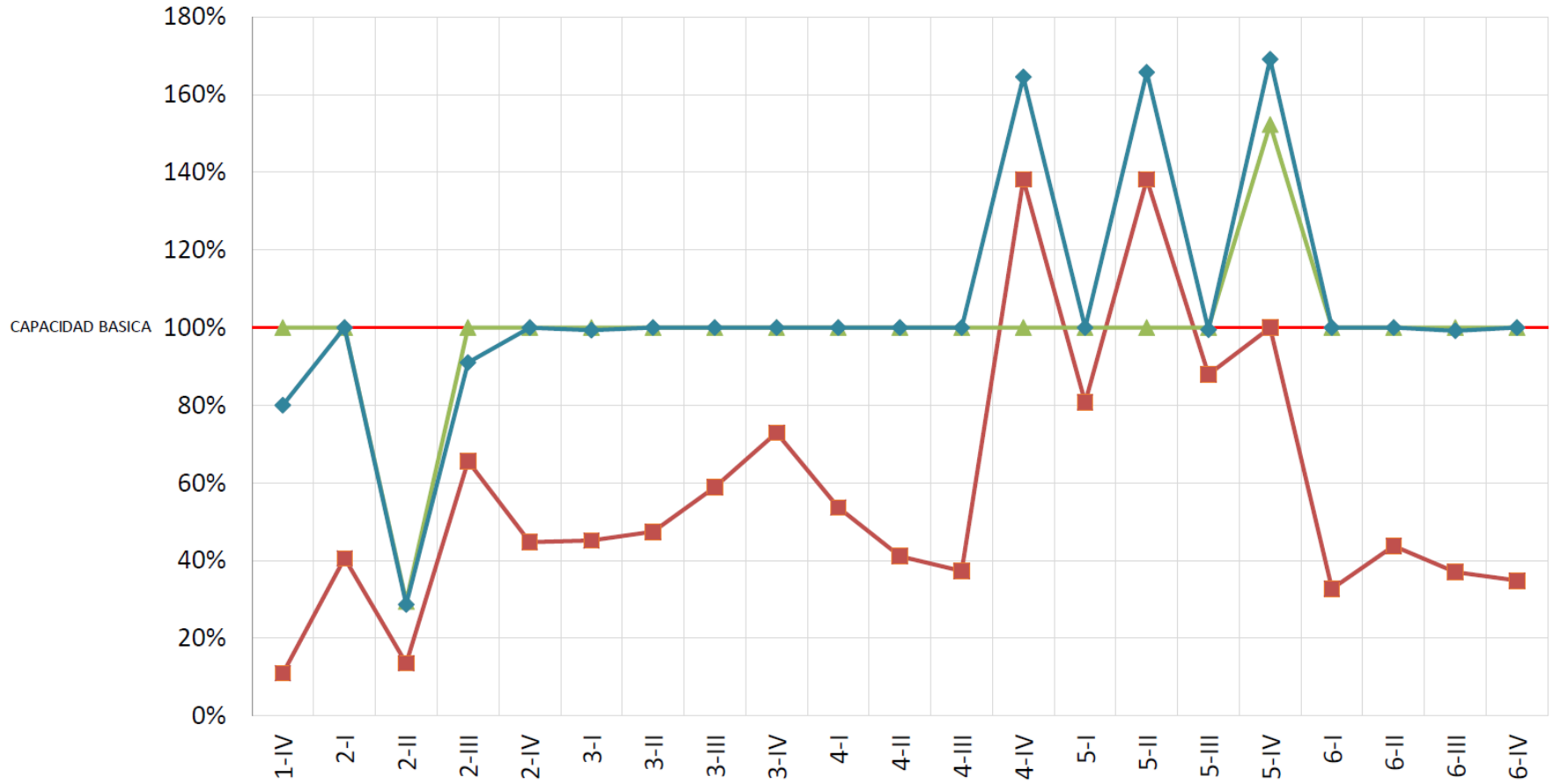
## Porcentaje del uso de los procesos (histórico)

■ HORNO ▲ ACUÑACIÓN ◆ CORTE



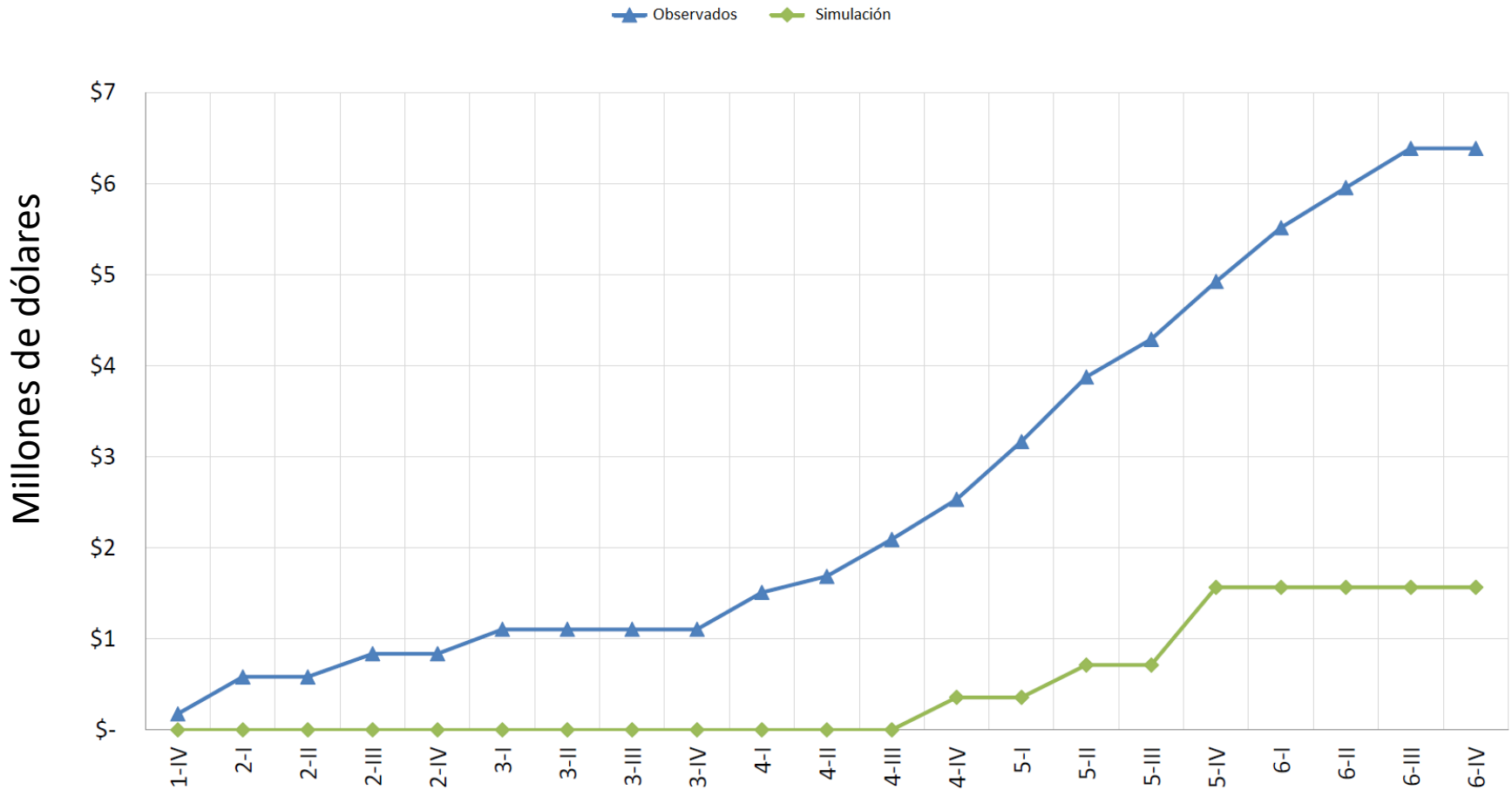
## Porcentaje del uso de los procesos (simulación)

■ HORNO ▲ ACUÑACIÓN ◆ CORTE



## Comparación de costos acumulados

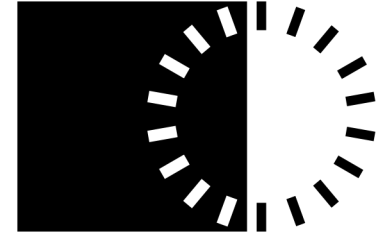
El costo de los terceros turnos se reduce al 24%





¡gracias por su  
atención!

MUSEO  
BANCO DE  
MÉXICO



- [alfaromontufar@gmail.com](mailto:alfaromontufar@gmail.com)
- <https://museobancodemexico.mx>

