Grupos de pilas de arena de graficas outerplanar

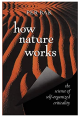
Banco de México

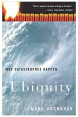
Carlos A. Alfaro

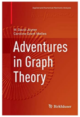
Trabajo en conjunto con Ralihe R. Villagrán (CINVESTAV)

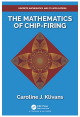
El grupo de pilas de arena tiene sus origenes en física estadística, ya que fue el primer modelo de un sistema dínamico con criticalidad autorganizada, la cual intenta explicar la ocurrencia de leyes potenciales en diversos fenómenos naturales, desde geofísica y economía hasta neurociencia.

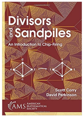
En matemáticas, se ha estudiado desde puntos de vista muy distintos como la geometría aritmetica, geometría algebraica, sistemas dínamicos, teoría de gráficas, cadenas de Markov, entre otros.



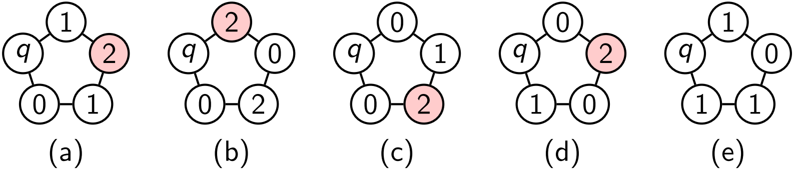








La dinámica de los grupos de pilas de arena se desarrolla en una gráfica de la siguiente manera.



Un **desbordamiento** consiste en seleccionar un vértice v **no estable** y mover $\mathbf{d_G(v)}$ granos de arena a sus vecinos, donde cada vecino u de v recibe el número de aristas entre u y v.

Toda configuración inestable sobre una gráfica conexa con un sumidero, siempre se podrá estabilizar, después de una secuencia fínita de desbordamientos.

La estabilización de una configuración $\mathbf{c}$ se denotará por $\mathbf{s}(\mathbf{c})$

La suma de dos configuraciones se hace entrada por entrada.

Definamos la operación $c \oplus d$ como la estabilización de la suma de $c + d$, es decir $s(c + d)$.

Una configuración c se dice que es recurrente si existe una configuración d distinta de la configuración cero, tal que, $s(c + d) = c$.

Teorema

El conjunto de las configuraciones recurrentes junto con la operación $\oplus$ forman un grupo fínito Abeliano.

Este grupo es conocido como el **grupo de pilas de arena**; el cual se denota por $K(G)$.

Para nuestro ejemplo sobre el ciclo de 5 vértices, las configuraciones recurrentes son $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$ y $(1,1,1,1)$.

- ¿Podria verficar que estas configuraciones junto con la operación $\oplus$ forman un grupo Abeliano?
- ¿Qué configuración es la identidad?

Propiedades principales

1. El número de árboles generadores de G es igual a $|K(G)|$,
2. Si G es plana y G^* es dual de G, entonces $K(G) \cong K(G^*)$,
3. Una evaluación del polinomio de Tutte es una función generadora de las configuraciones recurrentes,
4. Al parecer, los grupos de pilas de arena detectan más propiedades que los grupos de homología

La forma normal de Smith de la matriz de intersección de ciclos

Definición

Sea G una gráfica plana con s caras interiores $F_1, \ldots, F_s$, y sea $c(F_i)$ el número de aristas acotando la cara F_i. Definimos la matriz de intersección de ciclos $C(G) = (c_{ij})$ *como la matriz simetrica $s \times s$ donde $c_{ij} = c(F_i)$ si $i = j$, y c_{ij} es el negativo del número de aristas en común entre las caras F_i y F_j, si $i \neq j$.*

La forma normal de Smith (SNF) de la matriz M es la única matriz diagonal $\operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_r, 0, \ldots, 0)$, equivalente a M tal que r es el rango de M y $d_i | d_j$ para $i < j$. Los enteros d_i se llaman **factores invariantes**.

Lema

Sean $d_1, \ldots, d_r$ los factores invariantes de $C(G)$, entonces $K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$.

La gráfica dual debíl de una gráfica outerplana biconexa es un árbol.

Denotemos por $d(\mathcal{M})$ al determinante de la submatriz de $c(G) = \mathrm{diag}(c(F_1), \ldots, c(F_s)) - A(T)$ formado al selaccionar las filas y columnas asociados a los lazos de $\mathcal{M}$ de T^l.

Teorema

Sea G una gráfica plana biconexa cuyo dual debíl es el árbol T con n vértices. Sea $\Delta_i = \mathrm{mcd}(\{d(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \in 2M_k^*(T^l)\})$. Entonces, $K(G) \cong \mathbb{Z}_{\Delta_1} \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}$ and $\tau(G) = \Delta_n$.

¡Gracias!

Carlos A. Alfaro
alfaromontufar@gmail.com

Referencia:

C.A. Alfaro y R.R. Villagrán. The structure of sandpile groups of outerplanar graphs. [arXiv:2005.01314]