



Calculando configuraciones de pilas de arena con programación entera

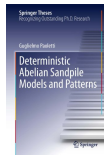
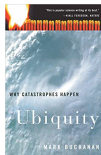
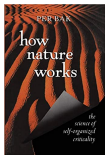
56 Congreso Nacional de la SMM 2023

Carlos A. Alfaro (BANXICO)

en conjunto con Carlos E. Valencia (CINVESTAV) y Marcos E. Vargas (BANXICO)

El grupo de pilas de arena tiene sus orígenes en física estadística en 1987. Fue el primer modelo de un sistema dinámico con **criticalidad autorganizada**, la cual intenta explicar la ocurrencia de leyes potenciales en diversos fenómenos naturales, desde geofísica y economía hasta neurociencia.

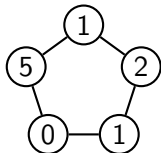
En matemáticas, se ha estudiado desde puntos de vista muy distintos como la geometría aritmética, geometría algebraica, sistemas dinámicos, teoría de gráficas, cadenas de Markov, entre otros.



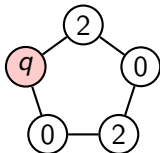
La dinámica de las pilas de arena se desarrolla en una gráfica de la siguiente manera.

Dada una gráfica G , una **configuración** es un vector c que asigna a cada vértice un número (no negativo) de granos de arena.

En algunas ocasiones, habrá un vértice especial llamado **sumidero** con la finalidad de coleccionar los granos que “salen del sistema”. Al cual denotaremos por q .



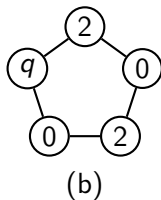
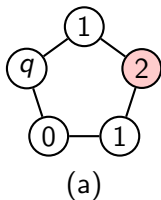
configuración
(5, 1, 2, 1, 0)



configuración
con sumidero

Decimos que un vértice v es **no estable** si el número c_v de granos de arena en el vértice v es mayor o igual a su grado $d_G(v)$, es decir, $c_v \geq \mathbf{d}_G(\mathbf{v})$.

Un **desbordamiento** consiste en seleccionar un vértice v **no estable** y mover $\mathbf{d}_G(\mathbf{v})$ granos de arena a sus vecinos, donde cada vecino u de v recibe el número de aristas entre u y v .



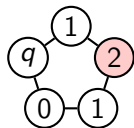
Una configuración c es **estable** si sus vértices son estables.

Teorema

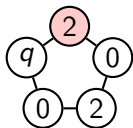
Toda configuración inestable sobre una gráfica conexa con un sumidero, siempre se podrá estabilizar, después de una secuencia finita de desbordamientos.

La estabilización de una configuración c se denotará por $s(c)$

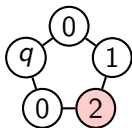
Una **avalancha** es una secuencia finita necesaria para obtener una configuración estable, y su tamaño es el número de desbordamientos utilizados.



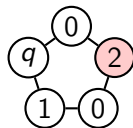
(a)



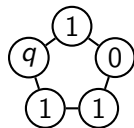
(b)



(c)



(d)



(e)

Avalancha de tamaño 4.

Configuraciones recurrentes

La suma de dos configuraciones se hace entrada por entrada.

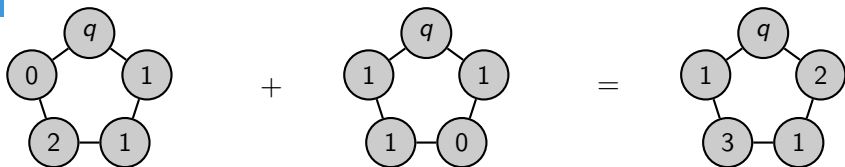


Figure: Suma de configuraciones

Definición

La **suma de pilas de arena** será denotada por $c \oplus d$ y es la estabilización de la suma $c + d$, es decir, $c \oplus d := s(c + d)$.

Definición

Una configuración c se dice que es **recurrente** si existe una configuración d distinta de la configuración cero, tal que, $s(c + d) = c$.

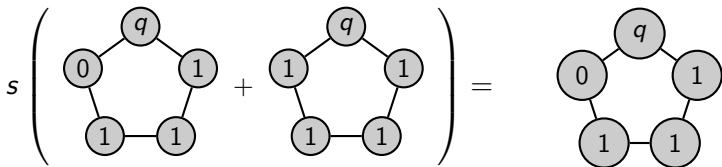
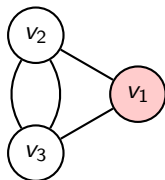
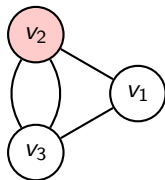


Figure: $(0,1,1,1)$ es recurrente

Las configuraciones recurrentes dependen del vértice sumidero.



$$\begin{array}{c} (v_2, v_3) \\ \hline (2, 1) \\ (2, 0) \\ (0, 2) \\ (1, 2) \\ (2, 2) \end{array}$$



$$\begin{array}{c} (v_3, v_1) \\ \hline (1, 0) \\ (2, 0) \\ (0, 1) \\ (1, 1) \\ (2, 1) \end{array}$$

El conjunto de configuraciones recurrentes sobre la gráfica G con el sumidero q lo denotaremos por $K(G, q)$.

¿Cuántas configuraciones recurrentes hay?

Definición

Sea G una gráfica. Una **subgráfica generadora** es una subgráfica H de G con $V(H) = V(G)$.

Definición

Un **árbol** es una gráfica conexa sin ciclos.

Teorema

El número de configuraciones recurrentes es igual al número de árboles generadores.

El número de árboles generadores de G se denotará por $\tau(G)$.

Teorema

El conjunto $K(G, q)$ de las configuraciones recurrentes junto con la suma de pilas de arena \oplus forman un grupo finito abeliano.

Recordemos que un grupo abeliano $(K(G, q), \oplus)$ satisface:

- (cerrado) si $a, b \in K(G, q)$, entonces $a \oplus b \in K(G, q)$,
- (asociativo) si $a, b, c \in K(G, q)$, entonces
 $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$,
- (identidad) $\forall a \in K(G, q)$, existe $e \in K(G, q)$ tal que
 $a \oplus e = e \oplus a = a$
- (inverso) $\forall a \in K(G, q)$, existe $b \in K(G, q)$ tal que
 $a \oplus b = b \oplus a = e$,
- (conmutativo) $\forall a, b \in K(G, q)$, se tiene $a \oplus b = b \oplus a$

Este grupo es conocido como el **grupo de pilas de arena**, el cual denotaremos por $K(G)$.

Para nuestro ejemplo sobre el ciclo de 5 vértices, las configuraciones recurrentes son $(0, 1, 1, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 1, 1, 0)$ y $(1, 1, 1, 1)$.

- ¿Podría verificar que estas configuraciones junto con la operación \oplus forman un grupo abeliano?
- ¿Qué configuración es la identidad?

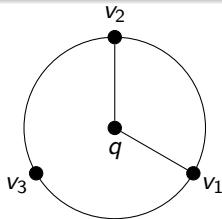
Matriz Laplaciana

Definición

La **matriz Laplaciana** es la matriz (con las filas y columnas indexadas con los vértices de G), tal que la entrada uv esta definida por

$$L(G)_{u,v} = \begin{cases} \deg_G(v) & \text{si } u = v, \\ -m_{u,v} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

donde $m_{u,v}$ es el número de aristas entre u y v .



$$L(G) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

La forma normal de Smith

Una matriz es **equivalente** a otra si se obtiene al

- Intercambiar dos filas o dos columnas,
- sumar un múltiplo entero de una fila (o columna) a otra,
- multiplicar una fila (o columna) por -1 .

Definición

La forma normal de Smith (SNF) de la matriz M es la única matriz diagonal

$$\text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$$

equivalente a M tal que r es el rango de M y $d_i | d_j$ para $i < j$. Los enteros positivos d_i se llaman **factores invariantes**.

Estructura del grupo de pilas de arena

Teorema

Sean d_1, \dots, d_r los factores invariantes de $L(G)$, entonces
 $K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$.

Denotemos por $L_q(G)$ a la matriz Laplaciana de G sin la columna y la fila asociadas a q .

Si G es una gráfica conexa, entonces los factores invariantes de $L(G)$ y $L_q(G)$ son los mismos.

Corolario

Sean d_1, \dots, d_r los factores invariantes de $L_q(G)$, entonces
 $K(G) \cong \mathbb{Z}_{d_1} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_r}$.

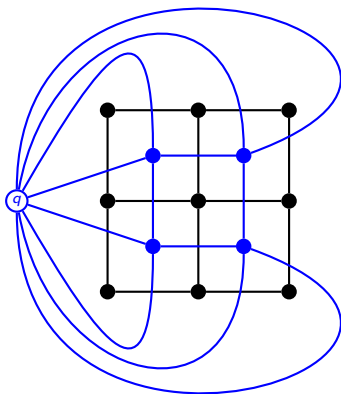
Proposición

Si K_n es la gráfica completa de n vértices. Entonces

$$K(K_n) \cong \bigoplus_{i=1}^{n-2} \mathbb{Z}_n.$$

$$L(K_n) = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{bmatrix} \sim \text{diag}(1, n, \dots, n, 0)$$

Gráfica plana y su dual



El dual de la rejilla se muestra en azul lo denotaremos por $L_{n,n}^q$.
El sumidero de $L_{n,n}^q$ suele ser el vértice asociado con la cara exterior de la rejilla.

Teorema (Vince 1991, Cori & Rossin 2000)

Si G es plana y G^* es dual de G , entonces $K(G) \cong K(G^*)$

El dual de C_n es la gráfica banana B_n



cuya matriz Laplaciana es

$$\begin{bmatrix} n & -n \\ -n & n \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo que $K(C_n) \cong K(B_n) \cong \mathbb{Z}_n$.

Gráficas con vértices de corte

Proposición

Sea G una gráfica cuyos bloques son B_1, \dots, B_m , entonces

$$K(G) \cong K(B_1) \oplus \dots \oplus K(B_m)$$

Problema

Dado un grupo finito abeliano Γ , ¿existe una gráfica G tal que $K(G) = \Gamma$?

Gráficas con vértices de corte

Proposición

Sea G una gráfica cuyos bloques son B_1, \dots, B_m , entonces

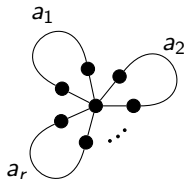
$$K(G) \cong K(B_1) \oplus \dots \oplus K(B_m)$$

Problema

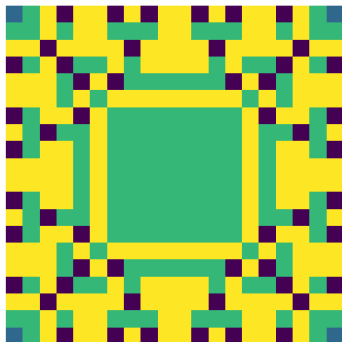
Dado un grupo finito abeliano Γ , ¿existe una gráfica G tal que $K(G) = \Gamma$?

Sí, basta tomar a G como un wedge de ciclos.

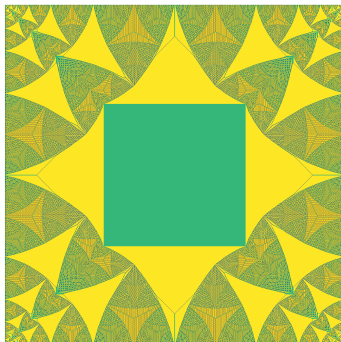
$$\mathbb{Z}_{a_1} \oplus \mathbb{Z}_{a_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{a_r}$$



Identidad en el complemento de la rejilla



(a) 20×20



(b) 1000×1000

El grupo de pilas de arena del complemento de la rejilla

n	$K(L_{n,n}^q, q)$
2	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{15}$
3	$\mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{240}$
4	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{1488} \oplus \mathbb{Z}_{22320}$
5	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{5552} \oplus \mathbb{Z}_{87116432}$
6	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{390768} \oplus \mathbb{Z}_{47142251520}$
7	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_{64} \oplus \mathbb{Z}_{16105920} \oplus \mathbb{Z}_{113441902566720}$
8	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{24} \oplus \mathbb{Z}_{3318522672} \oplus \mathbb{Z}_{12101139645290897136}$

Teorema (Alfaro, Valencia y Vargas, 2023)

Sea G una gráfica con sumidero q , \mathbf{c} una configuración estable en (G, q) , sea σ_{\max} la configuración estable máxima. Si \mathbf{x}^* es una solución óptima del programa lineal entero

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza:} & \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} \\ \text{sujeto a:} & \mathbf{0} \leq \mathbf{c} + \mathbf{x}L_q \leq \sigma_{\max} \text{ y } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{\tilde{V}}, \end{array}$$

entonces \mathbf{x}^* es único y $\mathbf{c} + \mathbf{x}^*L_q \in K(G, q)$.

Corolario

La solución óptima x^ del problema*

$$\begin{aligned} \text{maximiza:} & \quad \mathbf{1} \cdot \mathbf{x} \\ \text{sujeto a:} & \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{x}L_q \leq \sigma_{\max} \text{ y } \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{\tilde{V}}, \end{aligned} \quad (1)$$

*satisface que \mathbf{x}^*L_q es la identidad en $K(G, q)$.*

Corolario

Sea G una gráfica r -regular. Si el el sumidero $q \in V(G)$ es el ápice del cono de G , entonces $r \cdot \mathbf{1}$ es la identidad de $K(CG, q)$.

Programa lineal en SAGEMATH

```
def MIP(g,sink,conf):
    p = MixedIntegerLinearProgram(maximization=True,solver='GLPK')
    b = p.new_variable( integer=True)

    m = g.laplacian_matrix().delete_columns([ sink ]).delete_rows([ sink ])

    sigma = [v - 1 - c for (v,c) in zip(g.degree(),conf)]
    del sigma[sink]
    lhs = [-c for c in conf]
    del lhs[sink]


    p.set_objective( sum([b[i] for i in range(len(sigma)) ]))
    p.add_constraint( m*b, min=lhs, max=sigma)
    p.solve()
    sol = vector(p.get_values(b).values())
    return [int(u-v) for (u,v) in zip(m*sol,lhs)]

G = graphs.CycleGraph(5)
G.show()
sink = 0
configuration = G.order()*[0]
```

[Enlace a código en Sagemathcell.](#)

Referencias

- C.A. Alfaro, M.C. Vargas y C.E. Valencia. Computing sandpile configurations using integer linear programming, **Chaos, Solitons and Fractals**, 2023.
- R. Cori, D. Rossin, On the sandpile group of dual graphs, **European J. Combin.** 21 (2000) 447–459.
- A. Vince, Elementary divisors of graphs and matroids, **Europ. J. Combinat.** 12 (1991) 445–453.

The background of the slide is a dense, repeating pattern of small, colorful geometric shapes and lines. These shapes include triangles, squares, and irregular polygons, connected by thin lines, creating a complex, network-like or molecular structure. The colors used are primarily blue, green, yellow, and purple. A solid blue vertical bar is located on the left side of the slide.

¡Gracias por su atención!

Carlos A. Alfaro

alfaromontufar@gmail.com

<https://alfaromontufar.github.io>