

# Sistemas dinámicos discretos

*en la economía*

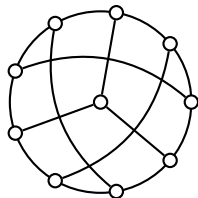
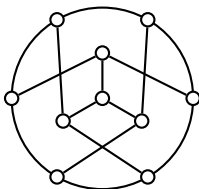
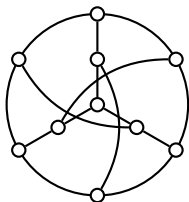
Carlos A. Alfaro

- 1 Gráficas
- 2 Ejemplos de redes
- 3 Sistemas dinámicos discretos
- 4 Modelo de segregación de Shelling
- 5 Pilas de arena
- 6 Juego del dolar

# Gráficas

## Definición

Una **gráfica**  $G$  es una pareja  $(V, E)$ , donde  $V$  es un conjunto no vacío y  $E$  es un conjunto de pares no ordenados de elementos de  $V$ .



- J.A. Bondy y U.S.R. Murty. **Graph theory**. Graduate Texts in Mathematics, 244. Springer, New York, 2008.
- M.E.J. Newman. **Networks**. An introduction. Second edition. Oxford University Press, Oxford, 2018.

# Seis grados de separación

Es común la expresión: "Que pequeño es el mundo."

En 1976, Stanley Millgram realizó<sup>1</sup> un experimento peculiar. Millgram mandó cartas a personas en Kansas y Nebraska, indicando que debían reenviar la carta a conocidos tal que el destinatario final debía ser un corredor de bolsa en Boston.

Millgram encontró que en promedio se necesitaron 5.2 intermediarios para llegar al destinatario.



<sup>1</sup>S. Millgram. **The small world problem.** Psychology today 2 (1967) 60–67.

# Cuatro grados de separación

En 2012, se encontró<sup>2</sup> que en la gráfica formada por los usuarios de Facebook se requería en promedio 3.74 usuarios para conectar cualesquiera dos usuarios en la componente conexa más grande.



---

<sup>2</sup>L. Backstrom, P. Boldi, M. Rosa, J. Ugander & S. Vigna. **Four degrees of separation.** In Proceedings of the 4th Annual ACM Web Science Conference (WebSci '12). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 33–42. <https://doi.org/10.1145/2380718.2380723>

# Red de economistas

En 2006, se analizó<sup>3</sup> la gráfica formada por los autores de economía entre 1970 y 1990 incluidos en EconLit.

	1970s	1980s	1990s
Total authors	33,770	48,608	81,217
Degree:			
Average	.894	1.244	1.672
Standard deviation	1.358	1.765	2.303
Giant component:			
Size	5,253	13,808	33,027
Percentage	15.6%	28.4%	40.7%
Second-largest component	122	30	30
Isolated authors:			
Number	16,735	19,315	24,578
Percentage	49.6%	39.7%	30.3%
Clustering coefficient	.193	.182	.157
Distance in giant component:			
Average	12.86	11.07	9.47
Standard deviation	4.03	3.03	2.23

<sup>3</sup>S. Goyal, M.J. van der Leij & J.L. Moraga-Gonzalez. **Economics: an emerging small world**. Journal of Political Economy, 114 (2006), 403-412. <https://doi.org/10.1086/500990>

## Red de matemáticos

En 2022, se analizó<sup>4</sup> la gráfica formada por los autores de matemáticas hasta 2020 MathSciNet tenía 982,875 autores con un promedio de 6.6 publicaciones por autor.

# Publications	# Citations	# Students	Name
1605	15147	1	Ravi P. Agarwal
1445	19170	4	Paul Erdős
1369	11196	1	Daniel J. O'Regan

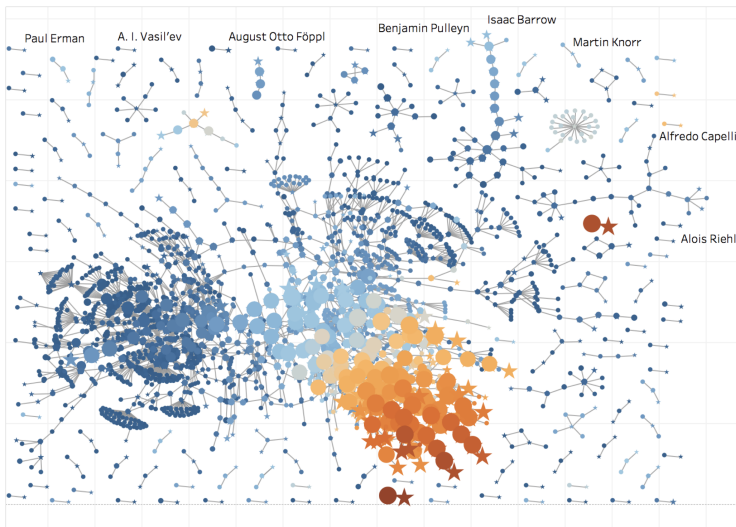
# Publications	# Citations	# Students	Name
380	27128	17	Pierre-Louis Lions
480	24017	46	Jacques-Louis Lions
230	22984	52	Elias Menachem Stein

# Publications	# Citations	# Students	Name
39	72	151	C.-C. Jay Kuo
479	18556	123	Roger Meyer Temam
205	1410	108	Pekka Neittaanmäki

<sup>4</sup>C.A. Alfaro, **Extremal Mathematicians**. Journal of Humanistic Mathematics, 12 (2022) 238-242. <https://doi.org/10.5642/jhummath.202201.18>

# Red de matemáticos

Gráfica de relación tutor-estudiante de los matemáticos antes de 1900.



<http://mozart.diei.unipg.it/gdcontest/contest2018/results.html>



# Sistema dinámico discreto

## Definición

Un **sistema dinámico** es un sistema cuyo estado evoluciona en el tiempo.

Ejemplos: el movimiento de un péndulo, el crecimiento de una población, la difusión de una enfermedad, etc.

## Definición

Un sistema dinámico es discreto si el tiempo es discreto.

El objetivo es elaborar modelos matemáticos apropiados que capten la dinámica del problema y de ser posible predecir sus estados futuros.

## Ejemplo: Crecimiento de una población

Sea  $Q_t$  el número de individuos en una población en el tiempo  $t$ .  
Sea  $Q_0$  el número de individuos en el tiempo inicial.

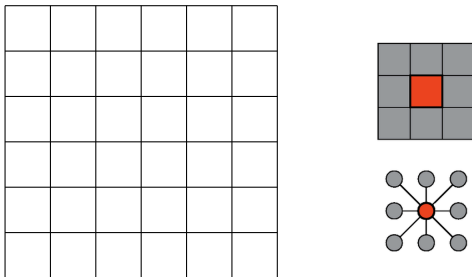
Un modelo sencillo del crecimiento poblacional es suponer que la cantidad de individuos en un instante es proporcional a la cantidad de individuos en el instante previo. (Ley de Maltus)

Es decir,  $Q_{t+1} = \lambda Q_t$ .

Por lo que  $Q_n = \lambda^n Q_0$ .

# Modelo de segregación de Shelling

El modelo se desarrolla en la rejilla  $n \times n$ . Cada agente ocupa un celda y tiene a lo más 8 vecinos (vecindad de Moore).



Thomas C. Schelling. **Dynamic models of segregation**. The Journal of Mathematical Sociology. 1 (1971) 143–186.  
doi:10.1080/0022250x.1971.9989794

<http://www.netlogoweb.org/launch#http:>

[//www.netlogoweb.org/assets/modelslib/Sample%20Models/Social%20Science/Segregation.nlogo](http://www.netlogoweb.org/assets/modelslib/Sample%20Models/Social%20Science/Segregation.nlogo)

# Modelo de segregación de Shelling

- Los agentes se dividen en 2 grupos (rojos y azules).
- Cada agente desea que una fracción  $\lambda$  de vecinos sean de su mismo grupo.
- En cada iteración se busca que cada agente satisfaga que  $\lambda$  vecinos sean de su mismo grupo.
- En caso contrario, se reubica el agente en una nueva posición donde se satisfaga la condición.
- Las iteraciones continúan hasta que cada agente esté satisfecho.

Thomas C. Schelling. **Dynamic models of segregation**. The Journal of Mathematical Sociology. 1 (1971) 143–186. doi:10.1080/0022250x.1971.9989794

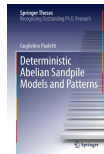
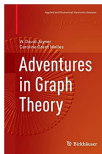
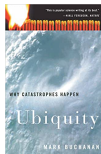
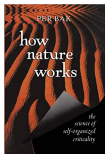
<http://www.netlogoweb.org/launch#http:>

[//www.netlogoweb.org/assets/modelslib/Sample%20Models/Social%20Science/Segregation.nlogo](http://www.netlogoweb.org/assets/modelslib/Sample%20Models/Social%20Science/Segregation.nlogo)

# Pilas de arena

Las pilas de arena tienen sus orígenes en física estadística en 1987. Fue el primer modelo de un sistema dinámico con **criticalidad autorganizada**, la cual intenta explicar la ocurrencia de leyes potenciales en diversos fenómenos naturales, desde geofísica y economía hasta neurociencia.

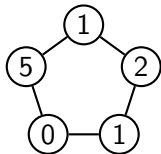
En matemáticas, se ha estudiado desde puntos de vista muy distintos como la geometría aritmética, geometría algebraica, sistemas dinámicos, teoría de gráficas, cadenas de Markov, entre otros.



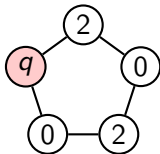
La dinámica de las pilas de arena se desarrolla en una gráfica de la siguiente manera.

Dada una gráfica  $G$ , una **configuración** es un vector  $c$  que asigna a cada vértice un número (no negativo) de granos de arena.

En algunas ocasiones, habrá un vértice especial llamado **sumidero** con la finalidad de coleccionar los granos que “salen del sistema”. Al cual denotaremos por  $q$ .



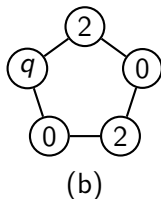
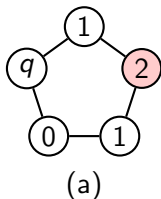
configuración  
(5, 1, 2, 1, 0)



configuración  
con sumidero

Decimos que un vértice  $v$  es **no estable** si el número  $c_v$  de granos de arena en el vértice  $v$  es mayor o igual a su grado  $d_G(v)$ , es decir,  $c_v \geq \mathbf{d}_G(\mathbf{v})$ .

Un **desbordamiento** consiste en seleccionar un vértice  $v$  **no estable** y mover  $\mathbf{d}_G(\mathbf{v})$  granos de arena a sus vecinos, donde cada vecino  $u$  de  $v$  recibe el número de aristas entre  $u$  y  $v$ .



Una configuración  $c$  es **estable** si sus vértices son estables.

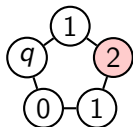
### Teorema

*Toda configuración inestable sobre una gráfica conexa con un sumidero, siempre se podrá estabilizar, después de una secuencia finita de desbordamientos.*

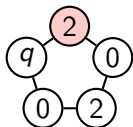
La estabilización de una configuración  $c$  se denotará por  $s(c)$



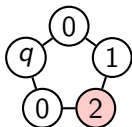
Una **avalancha** es una secuencia finita necesaria para obtener una configuración estable, y su tamaño es el número de desbordamientos utilizados.



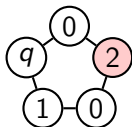
(a)



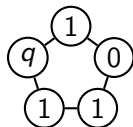
(b)



(c)



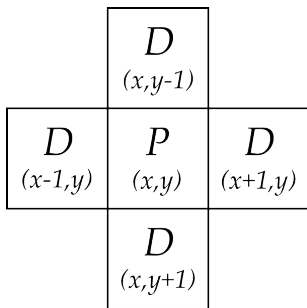
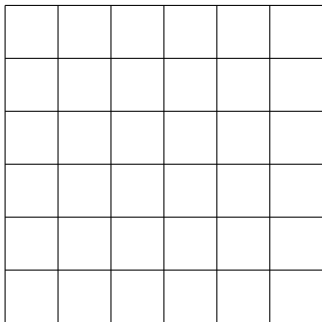
(d)



(e)

Avalancha de tamaño 4.

Rejilla  $7 \times 7$  inmersa en  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$



Vecindad de von Neumann

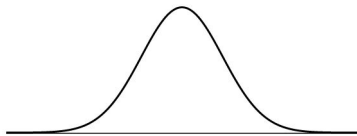
<https://alfaromontufar.github.io/pilasdearena/main.html>

# Sismos

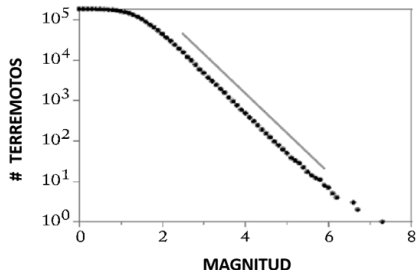
En 1950, Beno Gutenberg y Charles Richter esperaban que al censar los sismos ocurridos en el mundo podrían revelar un patrón significativo que pudiera revelar alguna causa de los terremotos.

Construyeron una tabla de frecuencias relativas de los sismos de diferentes tamaños.

Si hubiera un sismo típico, esperaríamos una campana de Gauss.



Pero no encontraron tal comportamiento, lo que encontraron fue el siguiente patrón.



Si un sismo de magnitud A tiene una magnitud el doble de magnitud que el sismo B, entonces el tipo A es cuatro veces menos frecuente que el tipo B.

A este comportamiento se le conoce como **ley de potencia Gutenberg-Richter**.

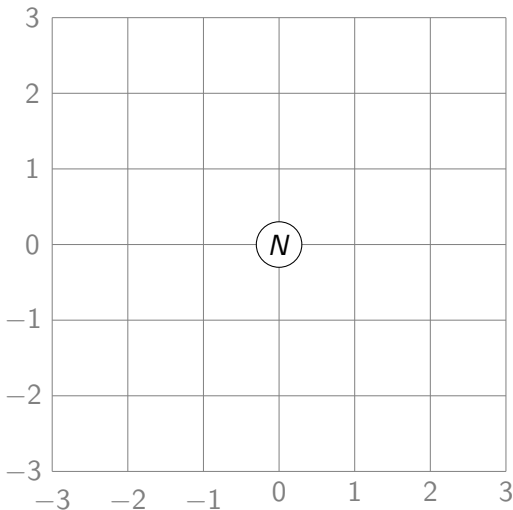
Per Bak, Chao Tang y Kurt Weisenfeld encontraron una relación similar con el juego de las pilas de arena.

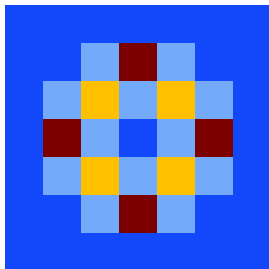
Esta observación los llevo al descubrimiento del **punto crítico** y de los **sistemas autorganizados críticamente**.

\*Per Bak, Chao Tang y Kurt Weisenfeld. Self-organized criticality: An explanation of  $1/f$  noise. **Phys. Rev. Lett.** 59, 381–384.

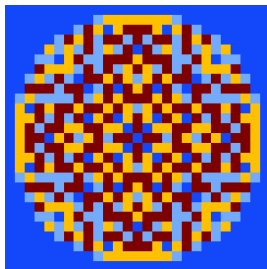
## Formación de patrones

Sobre la rejilla infinita colocamos  $N$  granos de arena en  $(0,0)$  y estabilizamos.

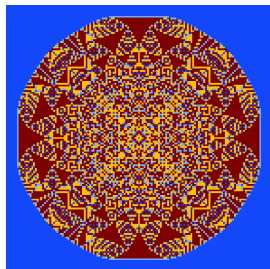




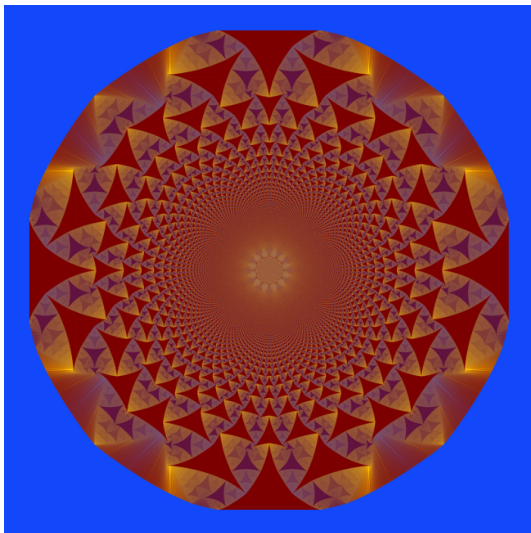
$2^5$



$2^{10}$



$2^{15}$



$2^{30}$



¿Qué pasa cuando  $N$  tiende a  $\infty$ ?

Wesley Pedgen y Charles K. Smart demostraron que existe una función en  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  a la cual converge \*-debilmente.

Su demostración usa técnicas de ecuaciones diferenciales.

Lionel Levine, Wesley Pedgen y Charles K. Smart demostraron que las soluciones a las EDP están relacionadas con **estructuras fractales de Apolonio**.

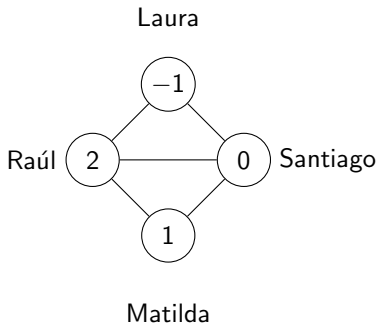
Algunas referencias:

- Wesley Pedgen y Charles K. Smart, Convergence of the Abelian sandpile, **Duke Math. J.** 162 (2013) 4 627–642.
- Lionel Levine, Wesley Pedgen y Charles K. Smart, Apollonian structure of integer superharmonic matrices. **Annals of Math.** 186 (2017) 1–67.

## Juego del dolar de Baker y Norine

La dinámica de las pilas de arena representan el flujo de dolares en una economía, donde una configuración representa la cantidad de dinero que tiene cada agente.

En este modelo, se permite que los agentes tengan deuda.



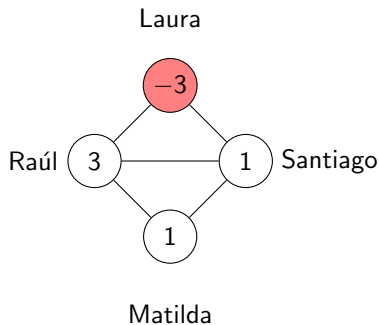
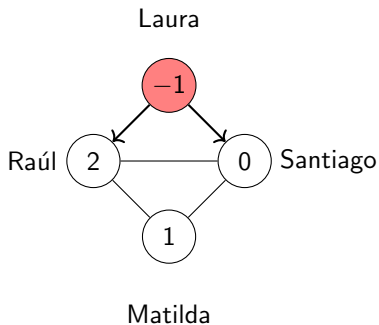
M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Juego del dolar de Baker y Norine

## Definición

Un **movimiento** consiste en que un vértice preste a cada vecino un dolar, o en que cada uno de los vecinos le den un dolar.



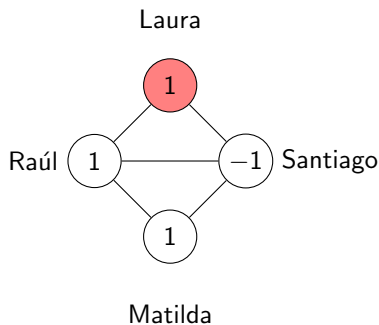
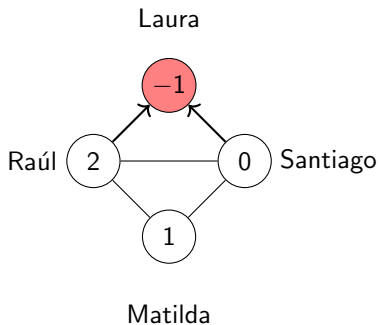
M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Juego del dolar de Baker y Norine

## Definición

Un **movimiento** consiste en que un vértice preste a cada vecino un dolar, o en que cada uno de los vecinos le den un dolar.



M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Juego del dolar de Baker y Norine

Note que cualquier movimiento no modifica el número de dolares en el sistema.

El objetivo es obtener configuración no negativa a través de movimientos.

Tal configuración se llama **configuración ganadora** y la secuencia de movimientos se dice que es una **estrategia ganadora**.

M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Juego del dolar de Baker y Norine

## Teorema

Sea  $g = |E(G)| - |V(G)| + 1$  y sea  $N$  el número de dolares en la economía.

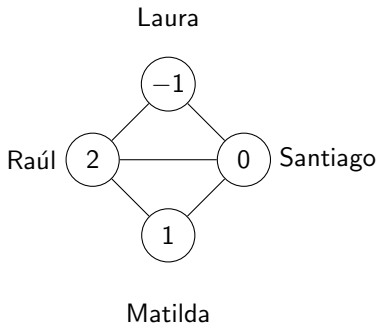
- 1 si  $N \geq g$ , entonces existe una estrategia ganadora.
- 2 si  $N \leq g - 1$ , entonces existe una configuración inicial para la que no existe una estrategia ganadora.

M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

## Juego del dolar de Baker y Norine

En la economía descrita abajo se tienen  $N = 2$  dolares y  $g = |E(G)| - |V(G)| + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$ , por lo tanto, existe una estrategia ganadora en este juego.

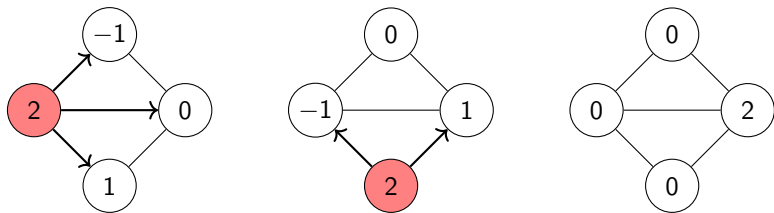


¿Puede encontrar una estrategia ganadora en este juego?

M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph**. Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>

# Juego del dolar de Baker y Norine



M. Baker y S. Norine. **Riemann-Roch and Abel-Jacobi theory on a finite graph.** Adv. Math. 215 (2007) 766–788.

<http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2007.04.012>



¡Gracias!

Carlos A. Alfaro

[alfaromontufar@gmail.com](mailto:alfaromontufar@gmail.com)

<https://alfaromontufar.github.io>